

## Mechanik der Faserverbundwerkstoffe

Dozentin: Prof. Dr. Christina Völlmecke

letztes Bearbeitungsdatum: 13.09.2016

Erstellt mit der freundlichen Mitarbeit von Franziska Eichner und Sandy Pradel. Überarbeitet von Robert Fankhänel.

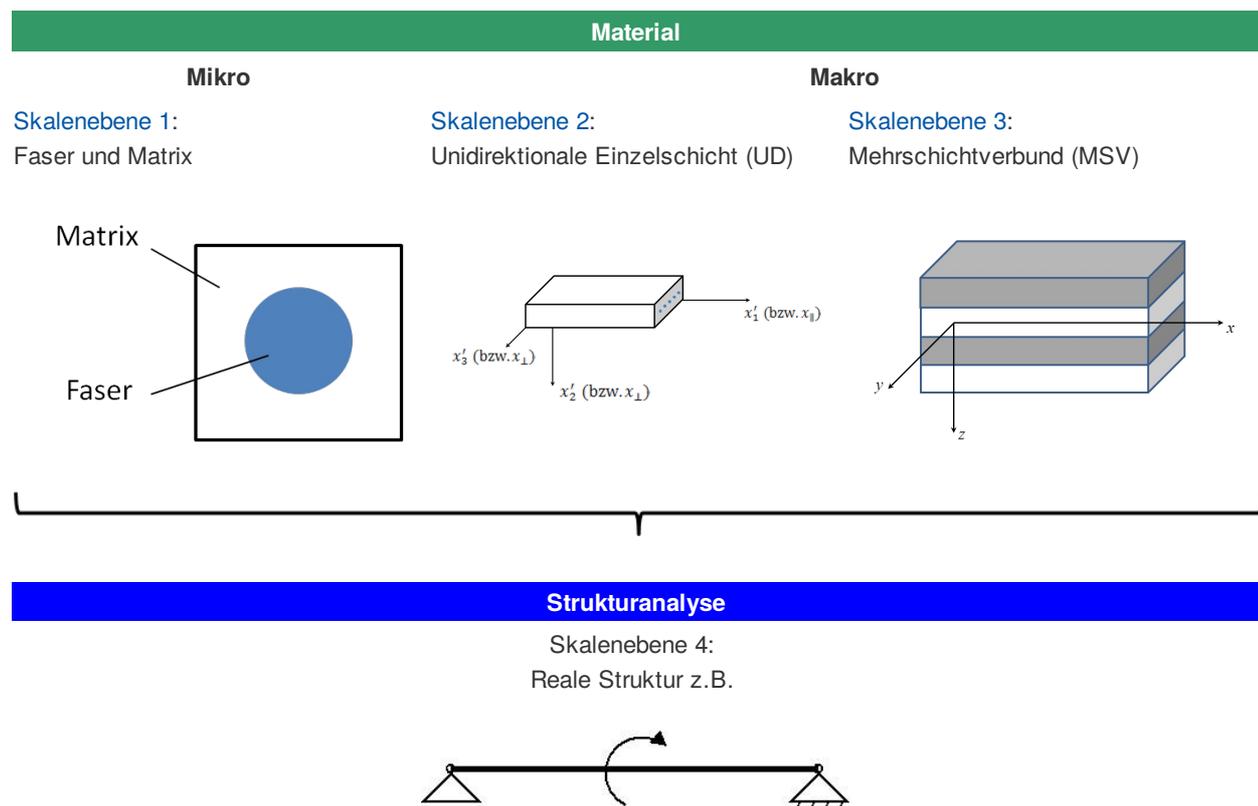
Dieses Material wird bereitgestellt von der TU Berlin und dient der Unterstützung des Moduls „Mechanik der Faserverbundwerkstoffe“.

Faserverbundwerkstoffe bestehen aus mindestens zwei Komponenten, einer bettenden Matrix sowie den verstärkenden Fasern. Durch die Komposition dieser unterschiedlichen Werkstoffe ergeben sich höherwertige Werkstückeigenschaften.

Zum besseren Verständnis der mechanischen Eigenschaften des Komposites wird das Material hier in drei Skalenebenen betrachtet (siehe nachfolgende Abbildung). In der Skalenebene 1 (Mikro) werden die beiden Komponenten (Faser und Matrix) getrennt betrachtet. Durch den idealisierten Zusammenschluss von Faser und Matrix (Homogenisierung) können effektive Werkstoffkonstanten in einer Einzelschicht (ES) bestimmt werden (siehe Abbildung: Skalenebene 2). Werden die Einzelschichten zu einem Mehrschichtverbund (MSV) zusammengefasst, betrachten wir die Skalenebene 3 (Makro).

Die folgenden Unterlagen beschreiben die Bestimmung der Materialkenndaten mit Hilfe des *bottom-up*-, sowie des *top-down*-Ansatzes. Mit dem *bottom-up* Ansatz startet die Herleitung in Skalenebene 1 und endet in Skalenebene 3. Grundsatz ist dabei zunächst eine Homogenisierung von Faser und Matrix. Dies ist der Übergang von der ersten auf die zweite Skalenebene. In der Skalenebene 2 werden daraufhin effektive Werkstoffkenndaten für eine unidirektionale Einzelschicht bestimmt. Diese Einzelschichten werden in der Skalenebene 3 nach der klassischen Laminattheorie zu einem Mehrschichtverbund zusammengefasst. Sollen in einem bestehenden Mehrschichtverbund lokale Versagenmechanismen untersucht werden wird der *top-down* Ansatz gewählt. Hierbei wird von der Skalenebene 3 auf die Skalenebene 1 zurückgerechnet.

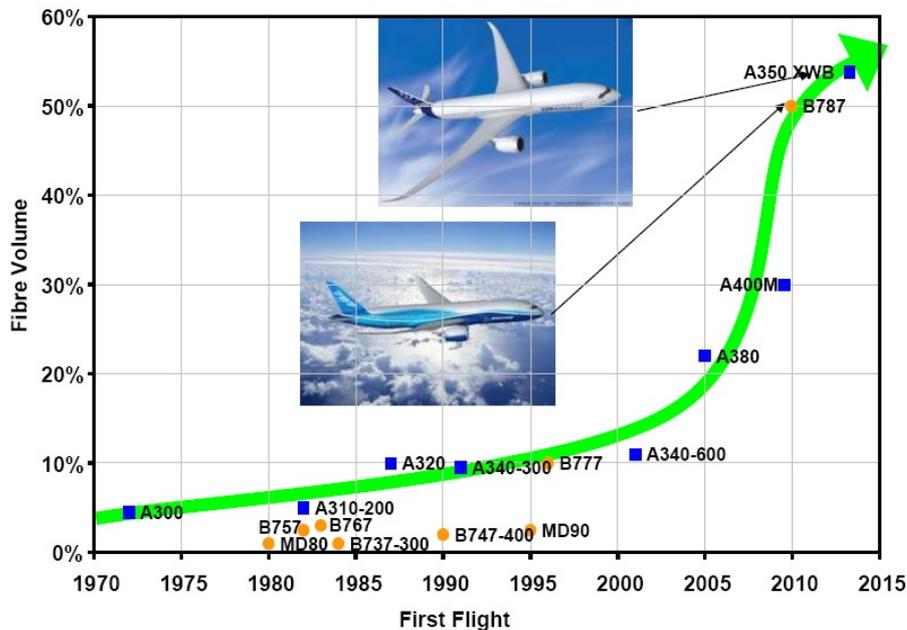
## Strukturen aus Faserkunststoffverbunden



## Einführung und Motivation

Aufgrund fortschreitender Ressourcenknappheit und dem Drang nach steigender Wirtschaftlichkeit werden in der Industrie Wege gesucht Material und Gewicht einzusparen. Die Gewichtsreduktion senkt den Energiebedarf besonders im Verkehrswesen (Flugzeug, Bahn, Kraftfahrzeuge). Daher wächst das Anwendungsspektrum von Faserverbundwerkstoffen kontinuierlich, denn die Materialklasse bietet hohe Festigkeiten bei geringem Gewicht und große konstruktive Gestaltungsfreiheiten. Verbundwerkstoffe sind Vereinigungen von verschiedenen Materialien und bestehen im Fall der Faserverbundwerkstoffe aus den sogenannten Verstärkungsfasern und einer faserumschließenden Matrix aus Kunststoff.

Dabei beschränkt sich der Einsatz von Verbundwerkstoffen nicht ausschließlich auf das Verkehrswesen. Es findet auch immer mehr Einzug in jegliche Bereiche der Industrie, indem Metall- und Kunststoffkonstruktionen durch Faserverbundwerkstoffe ersetzt werden. Im Leichtbau erhalten Faserverbundwerkstoffe einen steigenden Anteil tragender Strukturen. Beispielsweise sei hier das Verkehrsflugzeug Airbus A350 XWB genannt, welches einen Faserverbundwerkstoffanteil von über 50% aufweist, siehe nachfolgende Abbildung.



**Bild:** Entwicklung vom Einsatz von Faserkunststoffverbund im Flugzeugbau [5].

Im Rahmen dieser Einführung soll kurz auf die Vorteile, sowie Nachteile von Faserverbundwerkstoffen eingegangen werden:

Einige **Vorteile** gegenüber metallischen Konstruktionswerkstoffen:

- hohe Festigkeit und hohe Steifigkeit bei gleichzeitig sehr niedriger Dichte,
- freie Formgestaltung,
- Korrosionsbeständig,
- elektrische Eigenschaften (vom sehr guten Isolator bis zum Leiter - sind einstellbar),
- geringe Wärmeleitfähigkeit [1].

**Nachteile** gegenüber metallischen Werkstücken:

- höherer Materialpreis, insbesondere bei Laminaten aus Kohlenstofffasern [1].

## Skalenebene 1: Faser und Matrix

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Bestandteile von Faserverbundwerkstoffen beschrieben.

Faserverbundwerkstoffe bestehen mindestens aus zwei Komponenten:

1. extrem dünne und flexible **Fasern**
2. eine diese umgebende **Matrix**.

Durch die Kombination der Faser und der Matrix kann ein höherwertiger Werkstoff erzeugt werden. Die Fasern nehmen maßgeblich axiale Belastung (Zug- und Druckbelastung) auf, wobei die Matrix die Fasern stützt und schützt und den Lasttransfer zwischen den Fasern gewährleistet. Die verschiedenen Fasertypen und Matrixsysteme werden in den ersten beiden Kapiteln genauer erläutert. Im dritten Kapitel wird auf die Mikromechanische Mischungsregeln eingegangen. Hierbei wird für die Bestimmung effektiver Ingenieurskonstanten das Faser-Matrix Gebilde idealisiert und anschließend homogenisiert.

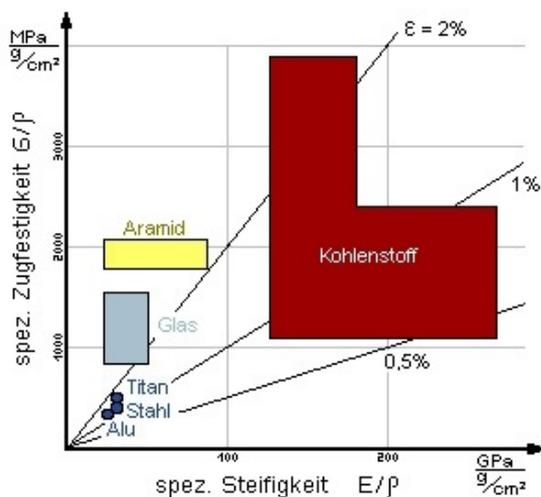


## Struktur von Kapitel 1

- Fasertypen
  - Glasfaser
  - Kohlenstofffaser
  - Aramidfaser
  - Faserhalbzeuge
- Matrixsystem
  - Duroplaste
  - Thermoplaste
  - Elastomere
- Mikromechanische Mischungsregeln
  - Faservolumenanteil
  - Effektive Ingenieurskonstanten in Faserlängsrichtung
  - Effektive Ingenieurskonstanten in Faserquerrichtung

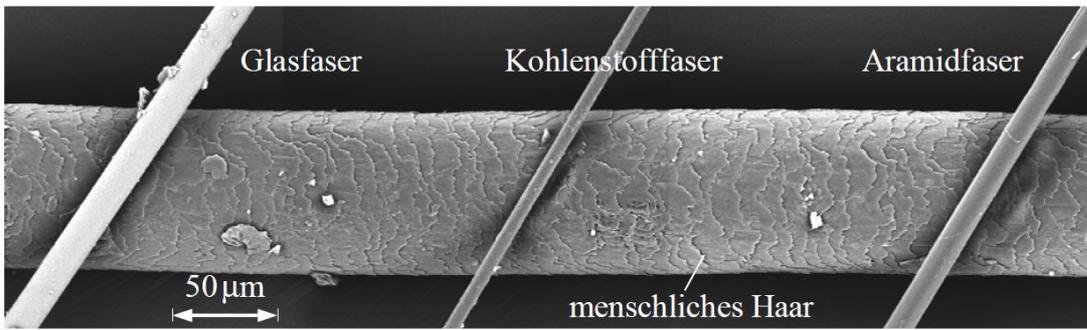
## Fasertypen

Die Fasern in einem Faserkunststoffverbund nehmen die Zug- und Druckbelastung auf. Die Fasern müssen dafür hohe Steifigkeiten und Festigkeiten aufweisen. Dies setzt eine hohe atomare Bindung in der Faser voraus. Des Weiteren sollten sie für die Verwendung im Leichtbau eine geringe Dichte aufweisen.



**Bild:** Vergleich der verschiedenen Fasern hinsichtlich ihrer spezifischen Festigkeiten [6].

Zur Auswahl stehen als lasttragendes Element auch natürliche und künstliche Fasern. Naturfasern wie Wolle, Seide, Sisal oder Hanf liegen dabei nur in kürzeren Längen vor. Künstliche Fasern hingegen können als endlose Faser hergestellt werden. Die in industriellen Anwendungen am meisten vertretenen synthetischen Fasern sind [Glas-](#), [Kohlenstoff-](#) und [Aramidfasern](#), daher werden diese nachfolgend kurz vorgestellt.



**Bild:** Größenvergleich zwischen Glas-, Kohlenstoff- und Aramidfaser mit einem menschlichen Haar [1].

## Glasfaser

Glasfasern werden durch Ziehen von Glasfäden hergestellt. Dabei wird zunächst Glas geschmolzen und durch Spinndüsen geleitet. Anschließend werden die zähflüssigen Glasfäden zu Glasfasern gezogen. In der unteren Abbildung sind verschiedene **Faserhalbzeuge** aus Glasfasern dargestellt, die für die Auslegung von Formen verwendet werden.



**Bild:** Faserhalbzeuge aus Glasfaser [2].

Die Glasfaser ist die einzige isotrope Verstärkungsfaser. Das heißt die Materialeigenschaften sind richtungsunabhängig.

Weitere **Vorteile** der Glasfaser sind:

- preisgünstig,
- hohe Längs-Zug- und Längs-Druckfestigkeit,
- hohe Bruchdehnung,
- sehr gute thermische und elektrische Isolationsfähigkeit,
- einfache Verarbeitung.

**Nachteile** der Glasfaser sind:

- schwierige Verarbeitung, da sich Glasgewebe statisch auflädt
- vergleichsweise niedriges Elastizitätsmodul.

**Anwendung** finden Lamine aus Glasfasern zum Beispiel im Fahrzeug- und Bootsbau sowie in der Luftfahrt.

Elastizitätsmodul in Faserlängsrichtung	$E \approx 70000 - 87000 \text{ N/mm}^2$
Schubmodul	$G \approx 30000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu = 0,22$
Zugfestigkeit	$R_f \approx 2000 - 4000 \text{ N/mm}^2$
Dichte	$\rho_f \approx 2,5 \text{ g/cm}^3$

**Tabelle:** Typische Materialkenndaten für eine Glasfaser nach [1].

## Kohlenstofffaser

Kohlenstofffaser besitzen aufgrund ihrer sehr hohen Festigkeit und Steifigkeit die besten Eigenschaften für eine Verstärkungsfaser. Kohlenstofffaser sind zudem anisotrop.



**Bild:** Gewebe aus Kohlenstofffasern [7].

**Vorteile:**

- geringe Dichte
- anpassbarer Festigkeitskennwert und E-Modul über Graphitierung,
- hohe Ermüdungsfestigkeit
- Matrixentlastung durch hohe Festigkeit
- Verfestigung der Faser in der Nähe der Bruchdehnung
- chemische Beständigkeit und Verträglichkeit.

**Nachteile** dieses Fasertypen:

- spröde Bruchverhalten
- geringe Bruchdehnung
- geringe faserparallele Druckfestigkeit
- Notwendigkeit großer Radien für das Legen der Faser
- hoher Preis.

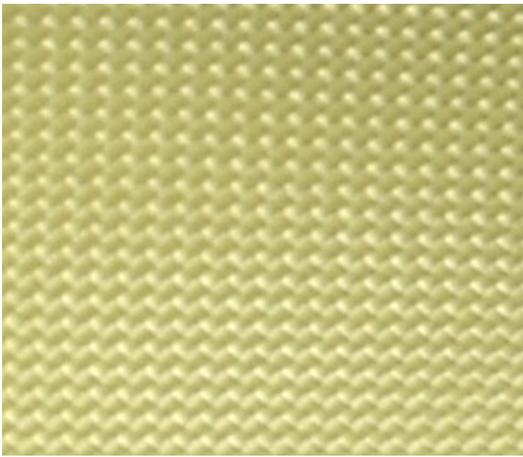
Elastizitätsmodul in Faserlängsrichtung	$E \approx 230000 - 450000 \text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul in Faserquerrichtung	$E \approx 15200 - 28000 \text{ N/mm}^2$
Schubmodul	$G \approx 28000 - 50000 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu_{21} = 0,2$
Zugfestigkeit	$R_f \approx 2100 - 4500 \text{ N/mm}^2$
Dichte	$\rho_f \approx 1,7 - 1,9 \text{ g/cm}^3$

**Tabelle:** Typische Materialkenndaten für eine Kohlenstofffaser [1].

Aufgrund der hohen Festigkeit bei gleichzeitig geringem Gewicht wird die Kohlenstofffaser unter anderem im Flugzeugbau, Motorsport und anderen hochbelasteten Bereichen angewendet.

**Aramidfaser**

Aramidfasern sind anisotrope Polymerfasern. Aramid steht dabei für *aromatisch Polyamide*. Das Herstellungsverfahren von diesen Fasern ist sehr aufwendig und daher auch kostenintensiv, hierbei gleichen sich Aramidfaser und Kohlenstofffaser preislich [9]. Aramidfasern weisen eine geringere Dichte als Glas- und Kohlenstofffasern auf und sind somit besonders für den extremen Leichtbau geeignet.



**Bild:** Gewebe aus Aramidfasern [8].

Weitere **Vorteile** von Aramidfasern:

- hohe Zugfestigkeit
- sehr gute Ermüdungsfestigkeit
- hohe Zähigkeit und somit großer Widerstand gegen Rissausbreitung
- höhere Dämpfungseigenschaften als Glas- und Kohlenstofffaser
- verschleißfest
- geringes spezifisches Gewicht.

Die **Nachteile** von Aramidfasern:

- schwierige Verarbeitung, da Werkstoff sehr zäh
- geringes Kriechen der Faser
- nicht UV-beständig
- schlechte Matrixhaftung aufgrund von Hydrroskopie.

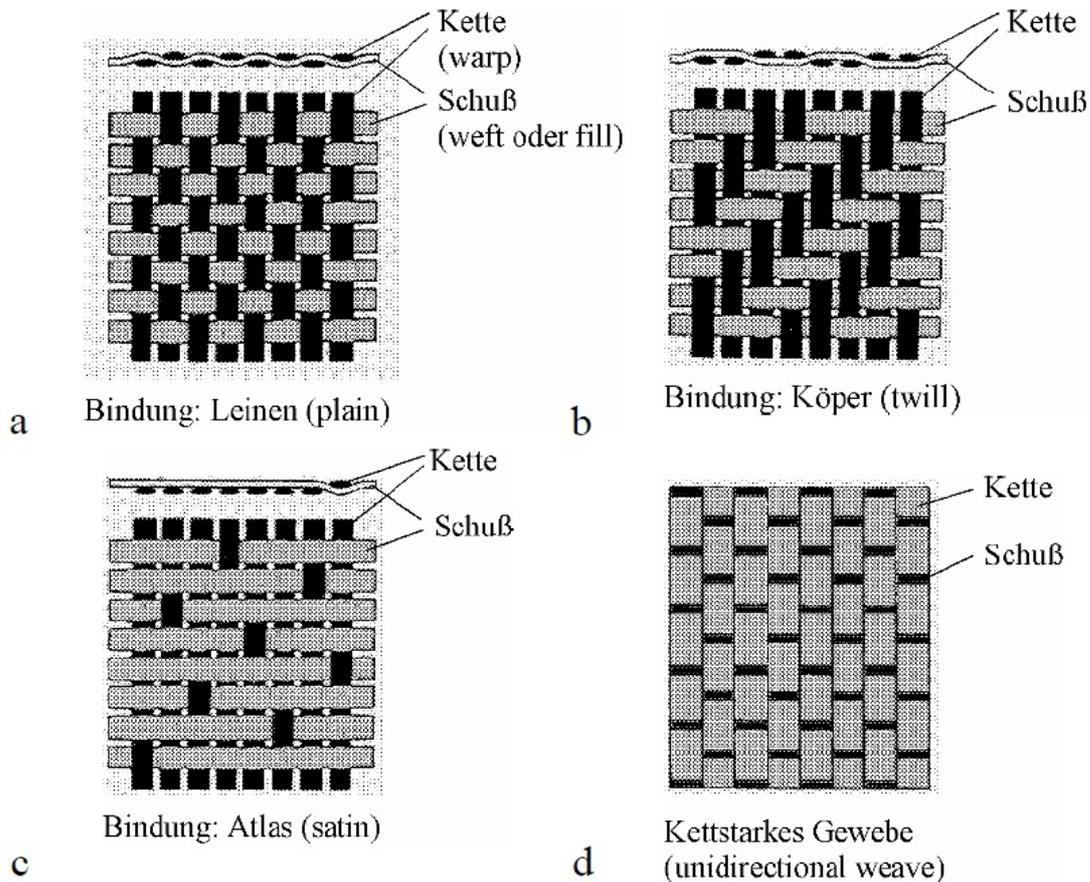
**Anwendung** finden diese Fasern unter anderem in Kajaks, kugelsicheren Westen und im Motorsport.

Elastizitätsmodul in Faserlängsrichtung	hochzäh: $E \approx 67000 \text{ N/mm}^2$ hochsteif: $E \approx 130000 \text{ N/mm}^2$
Elastizitätsmodul in Faserquerrichtung	$E \approx 5400 \text{ N/mm}^2$
Schubmodul	$G \approx 1450 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktionszahl	$\nu_{21} = 0,3$
Zugfestigkeit	$R_f \approx 2800 \text{ N/mm}^2$
Dichte	$\rho_f = 1,44 \text{ g/cm}^3$

**Tabelle:** Typische Materialkenndaten für eine Aramidfaser nach [1].

## Faserhalbzeuge

Für flächige Bauteile werden für eine einfachere Handhabung und Verarbeitung flächige textile Halbzeuge verwendet. Dabei handelt es sich meist um Gewebe, die aus zwei rechtwinklig zueinander stehenden Faserrichtungen, auch Kette und Schuß genannt, bestehen. Die am häufigsten verwendeten Gewebearten sind in der unteren Abbildung zusammengefasst.



**Bild:** Beispiele für Faserhalbzeuge: (a) Leinenbindung, (b) Körperbindung, (c) Atlasbindung, (d) Kettstarkes Gewebe [1].

Die **Leinenbindung** ist eine eins-über-eins Bindung. Der geringe Abstand der Kreuzungspunkte bewirkt ein sehr schiebefestes Material. Zudem lassen sich die gewünschten Faserausrichtung leicht und sicher festlegen, welches Vorteile beim Einlegen in die Passformen bietet. Bei gewölbten Formen muss das Gewebe eingeschnitten werden um Faltenwurf zu verhindern. Des Weiteren resultieren die großen Krümmungen der Fasern bei diesem Bindungstyp in einer Verminderung der Festigkeitskennwerte.

Bei der **Körperbindung** läuft der Schussfaden über zwei oder drei Kettfäden. Durch diese Konstruktion ist das Gewebe nicht sehr schubfest und lässt sich daher leichter (bzgl. Leinenbindung) in gewölbte Formen legen. Zudem ist die Krümmung der Fasern geringer wodurch höhere Festigkeitskennwerte erreicht werden.

Einen Nachteil bietet die Körperbindung im konstanten Einhalten der Faserorientierung.

Der Schussfaden der **Atlasbindung** verläuft über bis zu sieben Kettfäden. Daher bietet diese Gewebeart höhere Festigkeitskennwerte als die Körperbindung und kommt einer unidirektionalen Einzelschicht sehr nah ( $\approx 90\%$ ).

Ein weiteres Gewebe, welches einer unidirektionalen Einzelschicht sehr nahe kommt, ist ein kettstarkes Gewebe, welches in der Abbildung (d) dargestellt ist.

## Matrixsysteme

Die Matrix übernimmt im Faser-Matrix-System sowohl faserschützende als auch kraftaufnehmende Funktionen wie zum Beispiel:

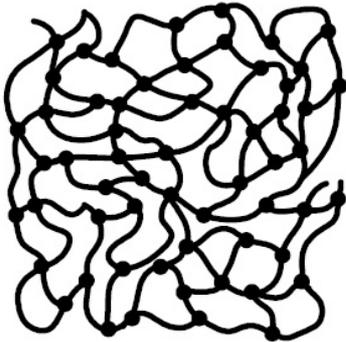
- Fixierung der Fasern,
- Formgebung des Bauteils,
- Schutz der Fasern vor Umgebungseinflüsse,
- Schutz vor Reibung zwischen den Fasern,
- Widerstand gegen Schubknicken der Fasern bei Druckbeanspruchung,
- Kraftverteilung zwischen den Fasern und den UD-Schichten,

- Kraftaufnahme bei Belastung in Faserquerrichtung,
- Aufnahme von Schubkräften und
- Wirkung als Risstopper bei zähem Matrixsystem.

Die Festigkeitskennwerte des Matrixmaterials sind verglichen mit den Fasermaterial viel geringer. Neben den metallischen Matrixsystemen sind vor allem die polymeren Matrixsysteme wie **Duroplaste**, **Thermoplaste** und **Elastomere** verbreitet.

## Duroplaste

Duroplaste sind die bekanntesten und gebräuchlichsten polymeren Matrixsysteme. Sie entstehen aus einer chemischen Vernetzungsreaktion, die als Härtung bezeichnet wird. Für diese Reaktion werden die zwei Komponenten Harz und Härter benötigt. Wird der Härter dem Harz zugegeben ergibt sich eine räumlich engmaschige, irreversible Vernetzung der beiden Mischungsbestandteile. Zur Auslösung der Härtung wird Wärme, Strahlung (UV) oder ein Katalysator benötigt.



*Bild: Schematische Darstellung der Kettenstruktur von einem Duroplast [1].*

Duroplaste weisen Vor- und Nachteilen auf:

### Vorteile:

- hohe Steifigkeit,
- chemische Beständigkeit,
- thermische Beständigkeit,
- geringe Kriechneigung,
- geringe Viskosität,
- zuverlässige Benetzung der Fasern.

### Nachteile:

- nicht schweißbar,
- sprödes Bruchverhalten ohne Zugabe von Füllstoffen oder Verstärkungsfasern und
- kein Recycling (nur als Füllstoff).

Duroplaste werden in vielen unterschiedlichen Bereichen eingesetzt. Um die Kennwerte der Duroplaste an die Belastungen anzupassen wird in der Faserverbundtechnik zwischen verschiedenen Reaktionsharzen unterschieden. Die verwendeten Harze und ihre entsprechenden Vorteile sind:

- Epoxid Harz (EP) - gute mechanische Eigenschaften,
- Ungesättigte Polyester Harze (UP) - einfache Handhabung, preiswert,
- Vinylester Harz (VE) - hohe Temperaturstabilität und
- Phenol Harze (PF) - elektrisch isolierend.

Im Automobilbau werden duroplastische Faser-Matrix-Verbunde als Stoßfänger und Außenhäute (Class A Flächen) eingesetzt. Weitere Verwendung finden sie als Verkleidungen in Lastkraftwagen und Zügen.

	Polyester	Epoxid	Vinylester
E-Modul [MPa]	4 800	3 150 - 3 400	4 000

Querkontraktionszahl [-]		≈0,35	
Zugfestigkeit [MPa]	60	75 - 90	83
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	1,22	1,2	1,14
Bruchdehnung [%]	2	5 - 6	6

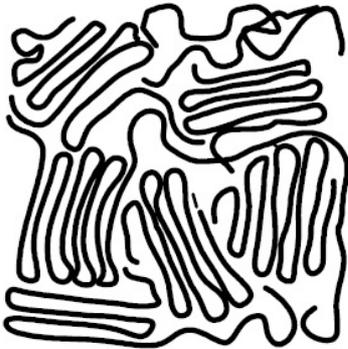
**Tabelle:** Materialkennwerte verschiedener Duroplaste nach [1].

## Thermoplaste

Thermoplaste bestehen aus linearen oder verzweigten Makromolekülen. Diese sind räumlich nicht vernetzt und haben bei höheren Temperaturen eine hohe Kriechneigung. Das heißt, beim Erwärmen entsteht eine hochviskose Flüssigkeit die beim Abkühlen wieder erstarrt. Dieser Vorgang ist beliebig oft wiederholbar. Die hohe Zähigkeit der Thermoplaste sorgt jedoch für eine schlechte Ummantelung der Faser.

**Vorteile** von Thermoplasten sind:

- sehr gute Verformbarkeit,
- Schweißbarkeit (Ultraschall, Laser),
- lange Lagerzeiten und
- leichtes Recycling.



**Bild:** Schematische Darstellung der Kettenstruktur von einem Thermoplast [1].

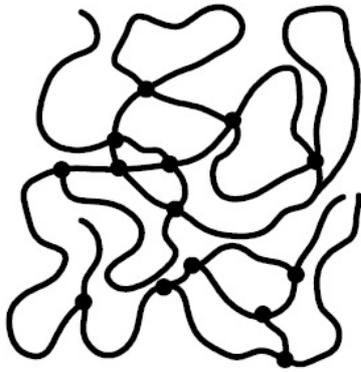
Für die Verwendung als Matrix in einem Faser-Kunststoffverbund eignen sich vor allem Polypropylen(PP), Polybutylenterephthalat(PBT) sowie Polyamide(PA). Die Materialkennwerte dieser Thermoplaste sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

	PP	PBT	PA
E-Modul [MPa]	1 600	2 600	2 000
Querkontraktionszahl [-]	0,4	0,41	0,4
Zugfestigkeit [MPa]	35	52	65
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	0,91	1,3	1,13
Bruchdehnung [%]	8	2	1,5

**Tabelle:** Materialkennwerte verschiedener Thermoplaste nach [1].

## Elastomere

Ausgangsmaterialien für Elastomere ist Kautschuk. Sie werden mit Schwefel oder Peroxid zu Elastomeren vulkanisiert, wodurch sie ihre charakteristische Molekülanordnung erhalten. Durch die lose vernetzte, weitmaschige und kettenförmige Anordnung sind Elastomere leicht elastisch verformbar. Die Einsatzmöglichkeiten von Elastomeren als Matrix sind allerdings sehr begrenzt.



**Bild:** Schematische Darstellung der Kettenstruktur von einem Elastomer [1].

Weitverbreitete Elastomere sind Silikone und Polyurethane.

Folgende Eigenschaften weisen Elastomere auf:

- reversibel verformbar,
- quellbar,
- nicht löslich,
- nicht schmelzbar und
- nicht schweißbar.

Elastomere finden unter anderem im Automobilbau Anwendung.

Die nachfolgende Tabelle zeigt Materialkennwerte für ein Silicon-Kautschuk.

	Silikon
E-Modul [MPa]	0,3 -30
Zugfestigkeit [MPa]	4 - 10
Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	1 - 1,5
Bruchdehnung [%]	100 - 600

**Tabelle:** Materialkennwerte von Thermoplasten am Beispiel von Silicon [10].

## Mikromechanische Mischungsregeln

Die mikromechanischen Mischungsregeln dienen zur Homogenisierung von Faser und Matrix um effektive Ingenieurskonstanten zu bestimmen. Die Werkstoffeigenschaften werden dann als "verschmiert" angesehen. Die einfachste Mischungsregel basiert auf den linearen Federgesetzen und soll hier angewendet werden. Das Ziel ist es dabei, **effektive Ingenieurskonstanten in Faserlängs- und Faserquerrichtung** in Abhängigkeit des **relativen Faservolumenanteils**:

$$\varphi = \frac{V_F}{V}$$

zu bestimmen. Dieser gibt das Verhältnis vom Faservolumen  $V_F$  zum Gesamtvolumen  $V$  an.

Die effektiven Ingenieurskonstanten in **Faserlängsrichtung** lauten schließlich:

$$E_{11,eff} = \varphi E_{F11} + (1-\varphi)E_M \text{ und}$$

$$\nu_{21,eff} = \varphi \nu_{F21} + (1-\varphi)\nu_M.$$

Die effektiven Ingenieurskonstanten in **Faserquerrichtung** lauten:

$$E_{22,\text{eff}} = \frac{E_M E_{F22}}{\varphi E_M + (1-\varphi) E_{F22}},$$

$$\nu_{12,\text{eff}} = \nu_{21,\text{eff}} \frac{E_{22,\text{eff}}}{E_{11,\text{eff}}} \quad \text{und}$$

$$G_{12,\text{eff}} = \frac{G_{F12} G_M}{\varphi G_M + (1-\varphi) G_{F12}}.$$

Die **Randbedingungen für die Mikromechanik** lauten dabei:

- ideale, parallele Ausrichtung der Fasern,
- regelmäßige Verteilung der Fasern,
- feste Bindung zwischen Faser und Matrix,
- keine Fehlstellen im Verbund,
- es liegt ein idealer Verbund mit ideal benetzten Fasern vor und
- ein linear-elastisches Verhalten von Faser und Matrix.

### Faservolumenanteil

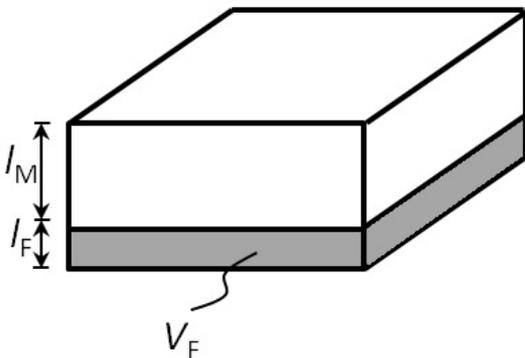
Der relative Faservolumenanteil  $\varphi$  gibt das Verhältnis von Faservolumen  $V_F$  zum Gesamtvolumen an  $V$ :

$$\varphi = \frac{V_F}{V},$$

bzw. bei konstanter Länge des betrachteten Elements als Verhältnis von der gesamten Querschnittsfläche der Fasern  $A_F$  zur Gesamtquerschnittsfläche  $A$ :

$$\varphi = \frac{A_F}{A} = \frac{l_F}{l},$$

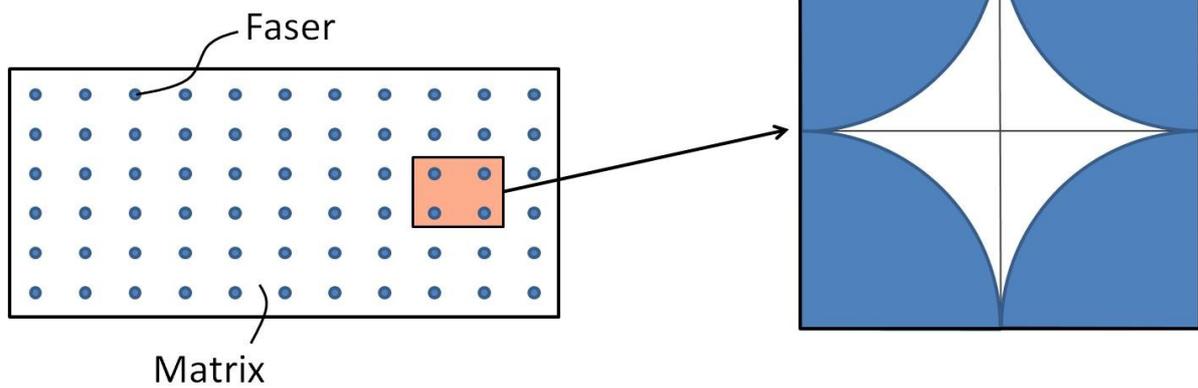
und ist einer der wichtigsten Konstruktionsparameter. Außerdem ist er unerlässlich zur Charakterisierung einer unidirektionalen Einzelschicht bzw. eines Laminats.



**Bild:** Schematische Veranschaulichung des relativen Faservolumenanteils.

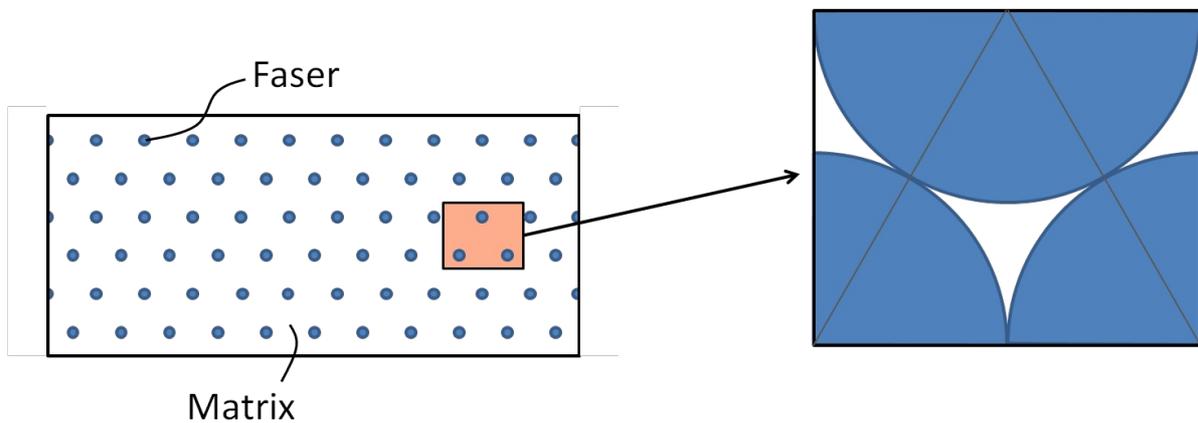
Der Richtwert liegt bei rund 60%, bei welchem eine adäquate Benetzung der Faser noch gewährleistet ist.

Je nach Packungsmodell gibt es eine geometrische Obergrenze. Diese liegt bei der quadratischen Faserpackung bei ca. 79%.



**Bild:** Quadratische Faserpackung.

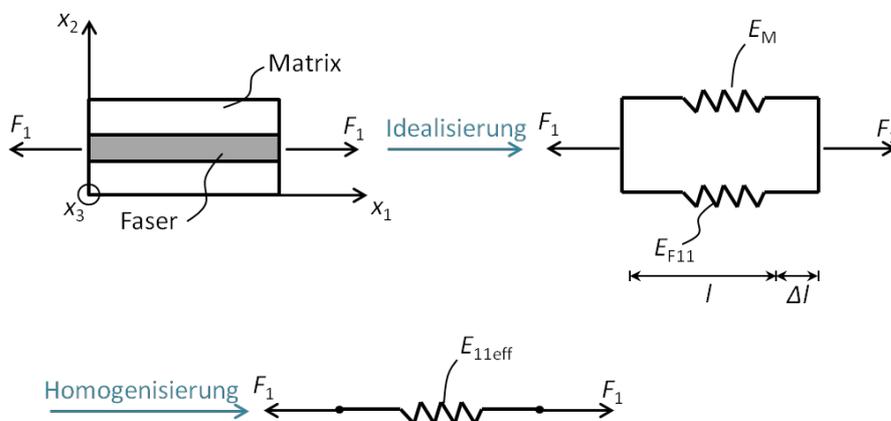
Bei einer hexagonaler Faserpackung liegt die geometrische Obergrenze des relativen Faservolumenanteils bei ca. 91%.



**Bild:** Hexagonale Faserpackung.

### Effektive Ingenieurskonstanten in Faserlängsrichtung

Für die Bestimmung der effektiven Ingenieurskonstanten in Faserlängsrichtung wird das Faser-Matrix-System zunächst idealisiert und anschließend homogenisiert. Die Belastung eines Faser-Matrix-Elements in faserparallele Richtung kann als parallelgeschaltete Federn verstanden werden. Die zwei Federn, die die Matrix und die Fasern darstellen, können im Zuge einer Homogenisierung als eine Feder mit der gesuchten effektiven Steifigkeit in Faserlängsrichtung zusammengefasst werden.



**Bild:** Veranschaulichung des Vorgehens für die Berechnung der effektiven Ingenieurskonstanten in Faserlängsrichtung.

Für die beiden Ersatzmodelle (mit zwei und mit einer Feder) wird nun das "mechanische Kochrezept" angewendet:

- es werden die Gleichgewichtsbedingungen,

- kinematische Bedingungen und
- das Werkstoffgesetz aufgestellt.

Mit diesem Vorgehen können viele elastostatische Probleme gelöst werden. Daher wird im weiteren Verlauf regelmäßig zur Herleitung der Gleichungen darauf zurück gegriffen.

### 1. Gleichgewichtsbedingung

Es wird ein Kräftegleichgewicht in axialer Richtung aufgestellt. Dafür gilt, dass die aufgebrachte Kraft  $F_1$  gleich der Summe der resultierende Kräfte in der Faser  $F_{F11}$  und in der Matrix  $F_{M11}$  ist.

$$\sum F_{x1} = 0 \Rightarrow F_1 = F_{F11} + F_{M11} \quad (1)$$

### 2. Kinematik

Bei der Parallelschaltung von Federn ist deren Auslenkung identisch:

$$\Delta l = \Delta l_{F11} = \Delta l_{M11}.$$

Für die Berechnung der Verzerrungen muss durch die Ursprungslänge  $l$  geteilt werden.

$$\epsilon_{11} = \frac{\Delta l}{l} = \epsilon_{F11} = \epsilon_{M11}. \quad (2)$$

### 3. Werkstoffgesetz

Das Werkstoffgesetz für den eindimensionalen Fall (Hooke'sches Gesetz) wird für das homogenisierte System, für die Faser und für die Matrix aufgestellt.

$$\text{homogenisiertes Gesamtsystem: } \sigma_{11} = E_{11,eff} \epsilon_{11} \quad (3)$$

$$\text{Faser: } \sigma_{F11} = E_{F11} \epsilon_{F11} \quad (4)$$

$$\text{Matrix: } \sigma_{M11} = E_{M11} \epsilon_{M11}. \quad (5)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (Gleichung (1)) kann in Abhängigkeit der Spannungen geschrieben werden:

$$\sigma_{11} A = \sigma_{F11} A_F + \sigma_{M11} A_M. \quad (6)$$

Wird Gleichung (6) durch die Gesamtquerschnittsfläche  $A$  dividiert ergeben sich die Spannung in Abhängigkeit vom relativen Faservolumenanteil:

$$\sigma_{11} = \varphi \sigma_{F11} + (1-\varphi) \sigma_{M11}. \quad (7)$$

In die Gleichung (7) wird nun das Werkstoffgesetz für die Faser (4) und für die Matrix (5) eingesetzt:

$$\sigma_{11} = \varphi E_{F11} \epsilon_{F11} + (1-\varphi) E_{M11} \epsilon_{M11}. \quad (8)$$

Aus der Kinematik (2) wird deutlich, dass die Verzerrungen für die Einzelkomponenten der Gesamtdehnung  $\epsilon_{11}$  entsprechen. Somit kann diese in Gleichung (8) eingesetzt und ausgeklammert werden:

$$\sigma_{11} = (\varphi E_{F11} + (1-\varphi) E_{M11}) \epsilon_{11}. \quad (9)$$

Der Vergleich der Gleichung (9) mit dem Hookeschen Gesetz (3) ergibt das effektive E-Modul in Faserrichtung:

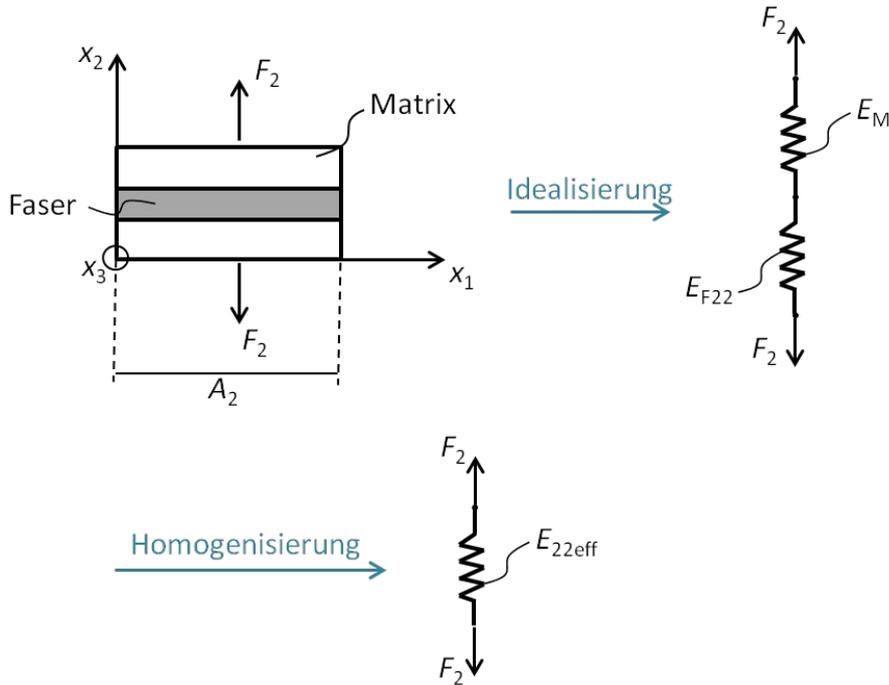
$$E_{11,eff} = \varphi E_{F11} + (1-\varphi) E_{M11}. \quad (10)$$

Das Vorgehen für die effektive Querkontraktionszahl ist analog und liefert:

$$\nu_{21,eff} = \varphi \nu_{F11} + (1-\varphi) \nu_M. \quad (11)$$

## Effektive Ingenieurskonstanten in Faserquerrichtung

Auch bei der Bestimmung der effektiven Ingenieurskonstanten in Faserquerrichtung wird das Faser-Matrix-Modell zunächst idealisiert und schließlich homogenisiert. Dabei kann eine Belastung senkrecht zur Faserrichtung als Reihenschaltung von Federn idealisiert werden. Diese können dann als eine Feder mit der gesuchten effektiven Steifigkeit homogenisiert werden.



**Bild:** Veranschaulichung des Vorgehens für die Berechnung der effektiven Ingenieurskonstanten in Faserquerrichtung.

Nun wird die Gleichgewichtsbedingung, Kinematik und das Werkstoffgesetz aufgestellt.

### 1. Gleichgewichtsbedingung

Es wird ein Kräftegleichgewicht in Faserquerrichtung aufgestellt. Aufgrund der Idealisierung des Systems als Reihenschaltung von Federn ist die angreifende Kraft  $F_2$  gleich der resultierenden Kraft in der Faser  $F_{F22}$  und der resultierenden Kraft in der Matrix  $F_{M2}$ .

$$\sum F_{x2} = 0 \Rightarrow F_2 = F_{F22} = F_{M2}$$

Aufgrund der identischen Kraftangriffsflächen ergibt sich für die Spannungen:

$$\sigma_{22} = \frac{F_2}{A_2} = \sigma_{F22} = \sigma_{M22} \quad (1)$$

### 2. Kinematik

Bei Reihenschaltung von Federn ist die Gesamtauslenkung die Summe der Auslenkung der einzelnen Federn:

$$\Delta l = \Delta l_{F2} + \Delta l_{M2}$$

Über Definition der Verzerrung  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$  kann diese Gleichung umgeschrieben zu:

$$\Rightarrow \epsilon_{22} l = \epsilon_{F22} l_F + \epsilon_{M22} l_M \quad (2)$$

### 3. Werkstoffgesetz

Das Werkstoffgesetz für den eindimensionalen Fall (Hooke'sches Gesetz) wird jeweils für das homogenisierte Gesamtsystem, die Faser und die Matrix aufgestellt:

$$\text{homogenisiertes Gesamtsystem } \sigma_{22} = E_{22,\text{eff}} \epsilon_{22} \quad (3)$$

$$\text{Faser} \quad \sigma_{F22} = E_{F22} \epsilon_{F22} \quad (4)$$

$$\text{Matrix} \quad \sigma_{M22} = E_M \epsilon_{M22} \quad (5)$$

Im Folgenden sollen die Verzerrungen mit dem relativen Faservolumenanteil dargestellt werden. Hierfür wird die Definition des relativen Faservolumenanteils über die Größe  $l_F$  verwendet. Teilt man also Gleichung (2) durch die Ausgangslänge  $l$  so findet sich diese Definition wieder:

$$\epsilon_{22} = \varphi \epsilon_{F22} + (1-\varphi) \epsilon_{M22} \quad (6)$$

Nun werden die Verzerrungen der Faser  $\epsilon_{F22}$  und der Matrix  $\epsilon_{M22}$  in Gleichung (6) durch das Materialgesetz aus Gleichung (4) und (5) ersetzt:

$$\epsilon_{22} = \varphi \frac{\sigma_{F22}}{E_{F22}} + (1-\varphi) \frac{\sigma_{M22}}{E_M} \quad (7)$$

Durch die Gleichheit der Spannung aus Gleichung (1) kann man die Faser- und Matrixspannung durch die allgemeine Spannung  $\sigma_{22}$  ersetzen und diese wiederum ausklammern:

$$\epsilon_{22} = \left( \frac{\varphi}{E_{F22}} + \frac{1-\varphi}{E_M} \right) \sigma_{22} \quad (8)$$

Dividiert man nun durch den Faktor von  $\sigma_{22}$  ergibt sich:

$$\sigma_{22} = \frac{E_{F22} E_M}{\varphi E_M + (1-\varphi) E_{F22}} \epsilon_{22} \quad (9)$$

Vergleicht man nun noch Gleichung (9) mit dem Stoffgesetz aus Gleichung (3) erhält man daraus das effektive E-Modul in Faserquerrichtung:

$$E_{22,eff} = \frac{E_{F22} E_M}{\varphi E_M + (1-\varphi) E_{F22}}$$

Das Vorgehen für das Schubmodul  $G_{12,eff}$  ist analog und liefert:

$$G_{12,eff} = \frac{G_{F12} G_M}{\varphi G_M + (1-\varphi) G_{F12}}$$

Die Querkontraktionszahl  $\nu_{12,eff}$  berechnet sich aus dem effektivem E-Modul in Faserlängsrichtung  $E_{11,eff}$  und dem effektivem E-Modul in Faserquerrichtung  $E_{22,eff}$ , sowie der Querkontraktionszahl in Fasllängsrichtung  $\nu_{21,eff}$ :

$$\nu_{12,eff} = \nu_{21,eff} \frac{E_{22,eff}}{E_{11,eff}}$$

## Skalenebene 2: Unidirektionale Einzelschicht (UD-ES)

Eine Schicht eines Faser-Kunststoff-Verbunds, in welcher alle Fasern in eine einzige Richtung orientiert sind, wird als **Unidirektionale Einzelschicht** (kurz: **UD-ES**) bezeichnet. Die Fasern werden dabei als ideal parallel und homogen verteilt angenommen. Die UD-Schicht ist das Grundelement geschichteter Faser-Kunststoff-Verbunde.

In diesem Abschnitt sollen die Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen für verschiedene Materialsymmetrien hergeleitet werden. Hier wird besonders auf das transversal isotrope Materialverhalten eingegangen, da es die Materialeigenschaften einer UD-ES beschreibt.

Die Steifigkeitsmatrix für ein transversal isotropes Material mit Fasern in  $x_1$ -Richtung lautet:

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix}$$

und die Nachgiebigkeitsmatrix lautet:

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix}.$$

Die Einträge dieser Matrizen werden mit den **effektiven Ingenieurskonstanten** einer unidirektionalen Einzelschicht besetzt. Die Nachgiebigkeitsmatrix lautet somit:

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\nu_{12}\frac{1}{E_{22}} & -\nu_{12}\frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}\frac{1}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\nu_{23}\frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}\frac{1}{E_{11}} & -\nu_{23}\frac{1}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\frac{1+\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Wenn der **ebene Spannungszustand** angenommen werden kann, können die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen in reduzierter Form verwendet werden:

$$C_{IJ,\text{red}} = Q_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \text{ und } S_{IJ,\text{red}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Für die gedrehte UD-Einzelschicht müssen die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix **transformiert** werden. Die **transformierte Steifigkeits-** und **Nachgiebigkeitsmatrix** lautet:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q'][T^{-1}]^T \text{ und } [\bar{S}] = [T]^T[S'][T].$$

mit der Transformationsmatrix  $[T]$

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix},$$

mit  $c = \cos(\alpha)$  und  $s = \sin(\alpha)$ , wobei  $\alpha$  der Drehwinkel zwischen Materialachsen- und Belastungsachsensystem ist.



## Struktur von Kapitel 2

### ■ Vorbemerkungen

- Einsteinsche Summenkonvention
- Der Spannungstensor
- Die Gleichgewichtsbedingung
- Der Verzerrungstensor
- Das Werkstoffgesetz
- Voigtsche Notation / Superindex

- Linear-elastisches, anisotropes Material
  - Euklidische Transformation
  - Materialsymmetrien
- Der ebene Spannungszustand
  - Polartransformationen

## Vorbemerkungen

Die zentralen Fragestellungen in der Festkörpermechanik lauten:

Welche **Verformungen** ergeben sich als Wirkung einer Belastung?

Welche **Beanspruchungen** sind zulässig, ohne dass ein Versagen eintritt?

Zur Lösung werden die **Grundgleichungen der Elastostatik** ("Kochrezept") verwendet. Dabei ist das mechanische System lösbar, wenn die folgenden *drei Bedingungen* definiert sind:

- i) die **Gleichgewichtsbedingung**,
- ii) die **Kinematik** des Systems (Verzerrungen) und
- iii) das **Werkstoffgesetz** (Kraft-Weggrößen-Verknüpfung).

Für die Aufstellung des dreidimensionalen linear-elastischen Werkstoffgesetzes benötigen wir folgende Tensoren:

- Spannungstensor  $\sigma_{ij}$
- Verzerrungstensor  $\epsilon_{kl}$
- Steifigkeitstensor  $C_{ijkl}$
- Materialgesetz:  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

In der linear-elastischen Theorie handelt es sich um symmetrische Größen, das heißt:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \epsilon_{kl} &= \epsilon_{lk} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl}, \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk} \text{ und,} \\ C_{ijkl} &= C_{klij}. \end{aligned}$$

Die Herleitung findet sich in den nächsten Unterabschnitten.

## Einsteinsche Summenkonvention

Bei der Einsteinschen Summenkonvention handelt es sich um eine Indexschreibweise, bei der über *doppelt auftretende Indizes* (sie werden auch als *stumme* oder *gebundene Indizes* bezeichnet) von eins bis drei summiert wird. Zum besseren Verständnis soll nun ein Beispiel gegeben werden:

$$t_i = n_j \cdot \sigma_{ji}$$

Dabei ist  $t_i$  ein Vektor oder Tensor 1. Stufe und  $\sigma_{ij}$  ein Tensor 2. Stufe mit Dimension drei.

Es soll nun der erste Eintrag  $t_1$  ausgeschrieben werden. Der doppelt auftretende Index ist in diesem Fall  $j$ , über den nun von eins bis drei aufsummiert wird:

$$t_1 = n_j \cdot \sigma_{j1} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}.$$

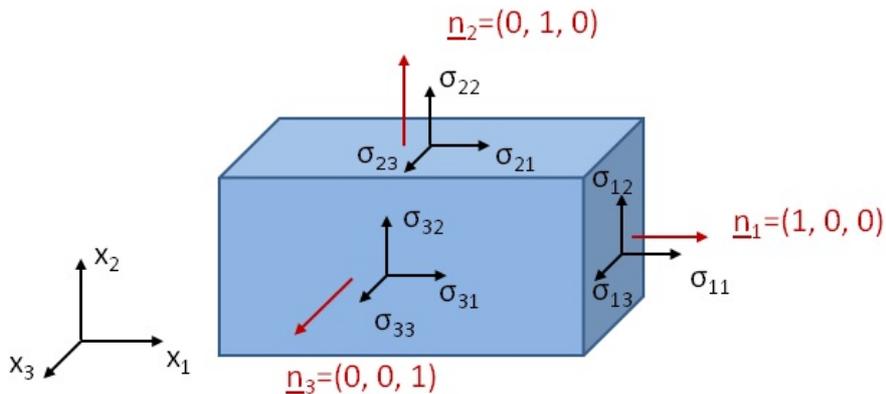
## Der Spannungstensor

Um die Gleichgewichtsbedingung aufzustellen, wird zunächst der Spannungstensor in Form der Cauchy-Spannungen eingeführt:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

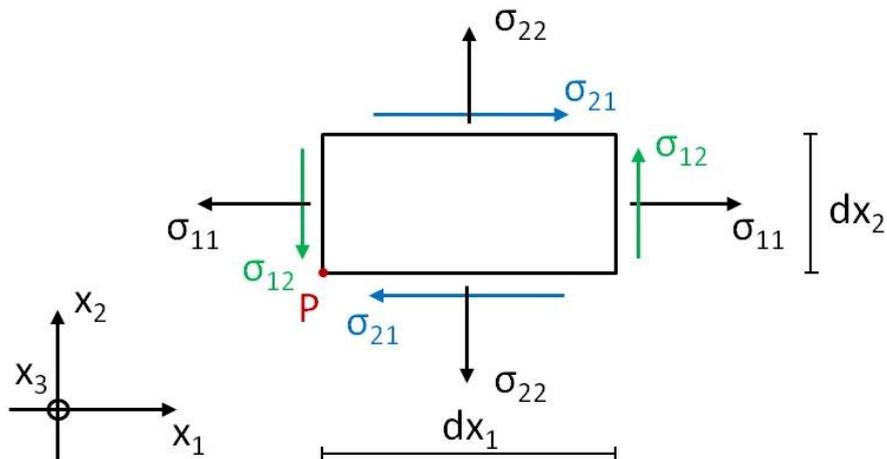
Zeile: 1. Index → zeigt die Normalenrichtung der Fläche an

Spalte: 2. Index → zeigt die Richtung der Kraft an



**Bild:** Beispielhafte Darstellung der Spannungskomponenten an einem Quader.

Die Symmetrie des Spannungstensors wird beispielhaft an einem infinitesimalen Element in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene mit der Dicke  $dx_3$  gezeigt.



**Bild:** Darstellung der Spannungskomponenten in der  $(x_1-x_2)$ -Ebene für die Aufstellung des Momentengleichgewichts.

Für den Beweis wird das Momentengleichgewicht um den Punkt P aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sum M^P &= 0 \Rightarrow \sigma_{12} dx_2 dx_3 dx_1 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 dx_2 = 0 \\ &\Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}. \end{aligned}$$

Dieses Vorgehen ist für die  $(x_1, x_3)$ -Ebene und  $(x_2, x_3)$ -Ebene analog.

Durch die Symmetrie des Spannungstensors reduzieren sich die neun Einträge auf sechs unabhängige Einträge. Das heißt, für den Spannungstensor gilt nun:

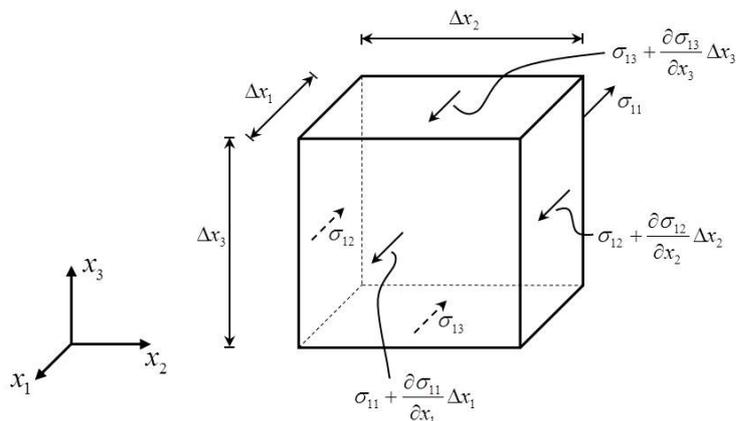
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

bzw.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

## Die Gleichgewichtsbedingung

In diesem Abschnitt sollen die Gleichgewichtsbedingungen am infinitesimalen Volumenelement hergeleitet werden, wobei die Volumenkräfte vernachlässigt werden. Hierfür wird jeweils das Gleichgewicht in den drei Raumrichtungen aufgestellt. Die Herleitung wird detailliert für die  $x_1$ -Richtung gezeigt. Für die  $x_2$  und  $x_3$ -Richtung wird analog vorgegangen.



**Bild:** Darstellung der für die Gleichgewichtsbedingung relevanten Spannungskomponenten in  $x_1$ -Richtung.

Die Gleichgewichtsbedingung wird in Form eines **Kräftegleichgewichts** in  $x_1$ -Richtung aufgestellt:

$$\begin{aligned} \sum F_{x_1} = 0 \Rightarrow & -\sigma_{11} \Delta x_2 \Delta x_3 + \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 \right) \Delta x_2 \Delta x_3 \dots \\ & -\sigma_{21} \Delta x_1 \Delta x_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \Delta x_2 \right) \Delta x_1 \Delta x_3 \dots \\ & -\sigma_{31} \Delta x_1 \Delta x_2 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \Delta x_3 \right) \Delta x_1 \Delta x_2 = 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun die Klammern aus, fasst zusammen und dividiert die gesamte Gleichung durch  $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$  so bleiben nur die partiellen Ableitungen übrig:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0.$$

Mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention lässt sich diese Gleichung auch verkürzt darstellen:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$$

oder mit dem Nabla-Operator:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0.$$

Das Ergebnis des Kräftegleichgewichts ist auch als Impulsbilanz der Statik unter Vernachlässigung der Volumenkräfte bekannt.

Allerdings stellt diese Gleichung nur *drei Gleichungen* bereit, wobei *sechs Unbekannte* zu bestimmen sind. Das heißt, es sind weitere Größen, wie die Verzerrungen und ein Werkstoffgesetz notwendig.

## Der Verzerrungstensor

Die Kinematik des Systems wird mit Hilfe des Verzerrungstensors abgebildet. Dieses lineare Verzerrungsmaß gilt nur für kleine Verzerrungen und ist über messbare Verschiebungen definiert:

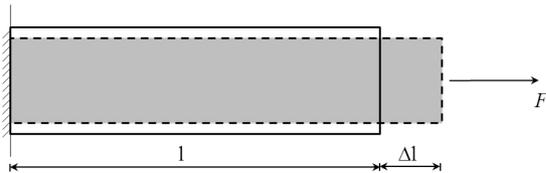
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Der Verzerrungstensor ist hier ein symmetrischen Tensor. Es gilt also:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}.$$

Der Verzerrungstensor beinhaltet sechs unabhängige Einträge die über drei Verschiebungen berechnet werden können.

Zur Verdeutlichung dieser Definition des Verzerrungstensors soll ein Zugstab betrachtet werden.



**Bild:** Eindimensionaler Zugstab.

Für einen eindimensionalen Zugstab ist die axiale Dehnung  $\epsilon_{ax}$  mit der Längenänderung  $\Delta l$  bezogen auf die Ausgangslänge  $l$  bekannt:

$$\epsilon_{ax} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Betrachtet man diesen Fall nun mit der obigen Definition so entspricht die axiale Verzerrung dem Eintrag  $\epsilon_{11}$  des Verzerrungstensors:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

## Das Werkstoffgesetz

Mit der allgemeinen Formulierung eines linear elastischen anisotropen Werkstoffgesetzes:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

hat der Steifigkeitstensor  $C_{ijkl}$  gemäß der Summenkonvention  $3^4 = 81$  unabhängige Einträge. Sie können allerdings aufgrund von Symmetrieeigenschaften für **linear-elastische Materialien** reduziert werden.

1) Die **erste Symmetrieeigenschaft** lässt sich aus der [Symmetrie der Spannungen](#) ableiten. Für die Spannungen gilt:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2)$$

Damit nun weiterhin Gleichung (1) erfüllt ist, existiert für den Steifigkeitstensor eine Symmetrie bezüglich der ersten beiden Indizes. Für den Steifigkeitstensor gilt somit:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}.$$

2) Die **zweite Symmetrieeigenschaft** leitet sich aus der [Symmetrie des Verzerrungstensors](#) ab. Es gilt somit:

$$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk} \quad (3)$$

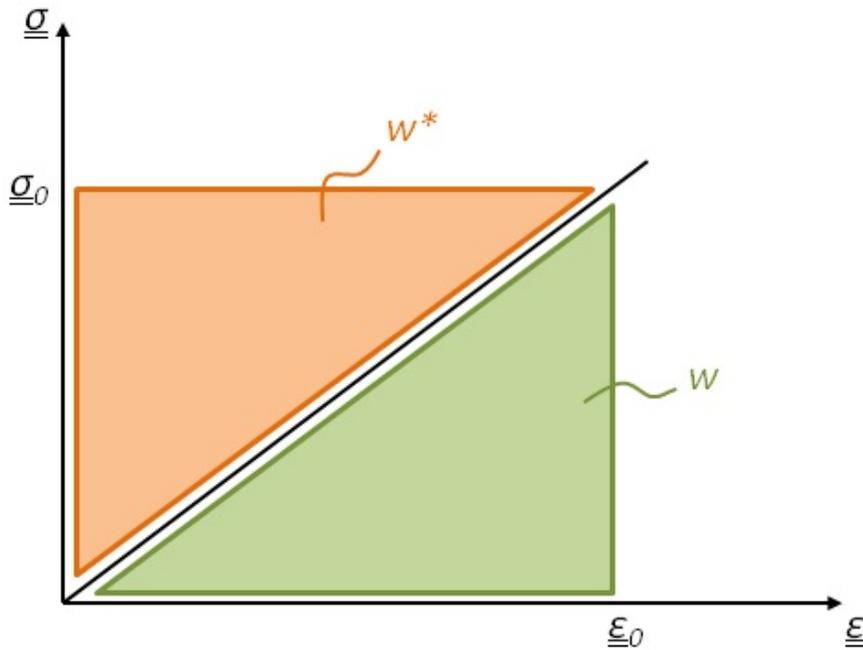
Damit nun Gleichung (1) weiterhin erfüllt ist, muss für den Steifigkeitstensor

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

gelten.

Der Steifigkeitstensor  $C_{ijkl}$  ist nun auf  $6 \cdot 6 = 36$  **unabhängige Einträge** reduziert

3) Die **dritte Symmetrieeigenschaft** lässt sich aus der Formänderungsenergiedichte ableiten. Dabei entspricht die Formänderungsenergiedichte  $w$  bei linear-elastischen Materialien ihrem komplementären Anteil  $w^*$ .



**Bild:** Formänderungsenergiedichte.

Es gilt somit:

$$w = w^*.$$

Die Formänderungsenergiedichte berechnet sich dabei aus der Spannung und den Verzerrungen:

$$w = \int_0^{\underline{\underline{\epsilon}}_0} \underline{\underline{\sigma}}_{ij}(\underline{\underline{\epsilon}}) d\underline{\underline{\epsilon}}$$

mit  $\underline{\underline{\sigma}}_{ij} = C_{ijkl} \underline{\underline{\epsilon}}_{kl}$  folgt:

$$w = C_{ijkl} \int_0^{\underline{\underline{\epsilon}}_0} \underline{\underline{\epsilon}}_{kl} d\underline{\underline{\epsilon}}_{ij}. \quad (4)$$

Für den komplementären Anteil gilt:

$$w^* = \int_0^{\underline{\underline{\sigma}}_0} \underline{\underline{\epsilon}}_{ij}(\underline{\underline{\sigma}}) d\underline{\underline{\sigma}}_{ij} \quad \text{mit } d\underline{\underline{\sigma}}_{ij} = d(C_{ijkl} \underline{\underline{\epsilon}}_{kl}) \text{ folgt:}$$

$$w^* = C_{ijkl} \int_0^{\underline{\underline{\sigma}}_0} \underline{\underline{\epsilon}}_{ij} d\underline{\underline{\epsilon}}_{kl}. \quad (5)$$

Nun können die Gleichungen (4) und (5) gleichgesetzt werden um die Forderung der Gleichheit zwischen der Formänderungsenergiedichte und dem komplementären Anteil zu erfüllen. Daraus folgt:

$$C_{ijkl} \int_0^{\epsilon_0} \bar{\epsilon}_{kl} d\bar{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl} \int_0^{\epsilon_0} \bar{\epsilon}_{ij} d\bar{\epsilon}_{kl} \quad . (6)$$

Ein weiteres Vereinfachen wird durch das Vertauschen der Indizes auf der rechten Seite möglich. Das Vertauschen erfolgt dabei wie folgt:

$$i \rightarrow k; j \rightarrow l; k \rightarrow i; l \rightarrow j$$

Somit wird aus Gleichung (6):

$$C_{ijkl} \int_0^{\epsilon_0} \bar{\epsilon}_{kl} d\bar{\epsilon}_{ij} = C_{klij} \int_0^{\epsilon_0} \bar{\epsilon}_{kl} d\bar{\epsilon}_{ij} \quad . (7)$$

Durch das Vertauschen der Indizes sind die Integrale identisch und dürfen aus der Gleichung (7) gekürzt werden. Daher konnte gezeigt werden, dass für den Steifigkeitstensor

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

gilt.

Es konnte also die paarweise Vertauschbarkeit der Indizes und somit die letzte Symmetrieeigenschaft des Steifigkeitstensors gezeigt werden. Somit besitzt der Steifigkeitstensor  $C_{ijkl}$  nun **21 unabhängige Einträge**.

### Voigtsche Notation / Superindex

Die Voigtsche Notation ist eine verkürzte Schreibweise für Tensoren. Dabei werden jeweils zwei Indizes aus der Tensornotation zu einem Index zusammengefasst. Der neue Index wird auch als Superindex bezeichnet. Das Zusammenfassen der Indizes erfolgt dabei durch folgende Konvention:

$$ij = (11, 22, 33, 23, 31, 12) \Rightarrow I = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

Somit kann z.B. der Spannungstensor in einen Spaltenvektor umgewandelt werden:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_I = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

Die ersten drei Komponenten werden auch als Normal- und die letzten drei Komponenten als Schubspannungskomponenten bezeichnet. Voraussetzung für diese Umwandlung ist die Symmetrie des [Spannungstensors](#).

Auch der Verzerrungstensor kann mit der Superindexschreibweise dargestellt werden:

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \epsilon_I = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix},$$

wobei hier zu beachten ist, dass

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, \\
\varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23}, \\
\varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{31} \text{ und} \\
\varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

gilt.

Hier entsprechen ebenfalls die ersten drei Komponenten den Normal- und die letzten drei Komponenten den Scherkomponenten.

Besonders beim Umschreiben des Verzerrungstensor von der Vektor auf die Superindexschreibweise ist auf den **Faktor 2** zu achten.

Dieser findet seinen Ursprung bei dem Umschreiben des Werkstoffgesetzes in die Superindexschreibweise:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \Rightarrow \sigma_I = C_{IJ} \varepsilon_J.$$

Es soll nun die Komponente  $\sigma_{11}$  exemplarisch berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{11kl} \varepsilon_{kl} \\
&= C_{1111} \varepsilon_{11} + C_{1112} \varepsilon_{12} + C_{1113} \varepsilon_{13} + \dots \\
&\quad C_{1121} \varepsilon_{21} + C_{1122} \varepsilon_{22} + C_{1123} \varepsilon_{23} + \dots \\
&\quad C_{1131} \varepsilon_{31} + C_{1132} \varepsilon_{32} + C_{1133} \varepsilon_{33}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie des Steifigkeitstensors, die unter dem Unterkapitel "[Das Werkstoffgesetz](#)" gezeigt wurde, sind einige Einträge dieser Gleichung gleich und können somit zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= C_{1111} \varepsilon_{11} + 2C_{1112} \varepsilon_{12} + 2C_{1113} \varepsilon_{13} + \dots \\
&\quad C_{1122} \varepsilon_{22} + 2C_{1123} \varepsilon_{23} + C_{1133} \varepsilon_{33}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Schreibt man das Werkstoffgesetz in der Superindexschreibweise um, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{16} \varepsilon_6 + C_{15} \varepsilon_5 + \dots \\
&\quad C_{12} \varepsilon_2 + C_{14} \varepsilon_4 + C_{13} \varepsilon_3 \\
\Rightarrow \sigma_I &= C_{IJ} \varepsilon_J. \quad (2)
\end{aligned}$$

Da sich die Steifigkeitstensoreinträge beim Umschreiben in die Voigtsche Notation nicht ändern sollen wird der vorhandene Faktor 2 in dem Verzerrungsvektor berücksichtigt. Bei der inversen Betrachtung des Werkstoffgesetzes wird dieser Faktor hingegen in der Nachgiebigkeitsmatrix berücksichtigt. Um dies näher zu erläutern, wird die erste Zeile des invertierten Werkstoffgesetzes in der konventionellen und der Superindexschreibweise expandiert, wobei die Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix und des Spannungstensors verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= S_{11kl} \sigma_{kl} \\
&= S_{1111} \sigma_{11} + S_{1122} \sigma_{22} + S_{1133} \sigma_{33} + 2S_{1123} \sigma_{23} + 2S_{1131} \sigma_{31} + 2S_{1112} \sigma_{12}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= S_{1J} \sigma_J \\
&= S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 + S_{13} \sigma_3 + S_{14} \sigma_4 + S_{15} \sigma_5 + S_{16} \sigma_6.
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= S_{1111}, \\
S_{12} &= S_{1122}, \\
S_{13} &= S_{1133}, \\
S_{14} &= 2S_{1123}, \\
S_{15} &= 2S_{1131} \text{ und} \\
S_{16} &= 2S_{1112}.
\end{aligned}$$

Somit lautet das inverse Werkstoffgesetz:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1131} & 2S_{1112} \\ S_{2111} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2231} & 2S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3331} & 2S_{3312} \\ 2S_{2311} & 2S_{2322} & 2S_{2333} & 4S_{2323} & 4S_{2331} & 4S_{2312} \\ 2S_{3111} & 2S_{3122} & 2S_{3133} & 4S_{3123} & 4S_{3131} & 4S_{3112} \\ 2S_{1211} & 2S_{1222} & 2S_{1233} & 4S_{1223} & 4S_{1231} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

## Linear-elastisches, anisotropes Material

Das allgemeine linear elastische anisotrope Materialgesetz (Hookesche Gesetz) lautet:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Dabei handelt es sich bei  $C_{ijkl}$  um den Steifigkeitstensor 4. Stufe. In der [Voigtschen Notation](#) lautet das Materialgesetz:

$$\sigma_I = C_{IJ} \varepsilon_J$$

Mit der inversen Beziehungen können über bekannte Spannungen mit der Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{ijkl}$  die Verzerrungen bestimmt werden:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

in der Voigtschen Notation ausgedrückt:

$$\varepsilon_I = S_{IJ} \sigma_J$$

Dabei ist die Nachgiebigkeitsmatrix die Inverse der Steifigkeitsmatrix:

$$S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$$

Ausgehend von diesem allgemeinen Materialgesetz können die Einträge der Steifigkeitsmatrix aufgrund von [Materialsymmetrien](#) von bisher 21 unabhängigen Einträgen weiter reduziert werden. Dafür ist die Kenntnis der [euklidischen Transformation](#) notwendig.

## Euklidische Transformation

Voraussetzung für eine Transformation sind folgende Punkte:

- physikalischer Raum  $\mathbb{R}^3$ ,
- betrachtet werden geradlinige Koordinatenachsen und
- verwendet werden kartesische Koordinatensysteme bzw. orthonormale Basisvektoren.

Orthonormalität bedeutet dabei, dass das **Skalarprodukt** von zwei verschiedenen Basisvektoren Null und von zwei gleichen Basisvektoren Eins ergibt. Dieser Zusammenhang lässt sich mit dem **Kronecker-Delta**  $\delta_{ij}$  darstellen.

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$$

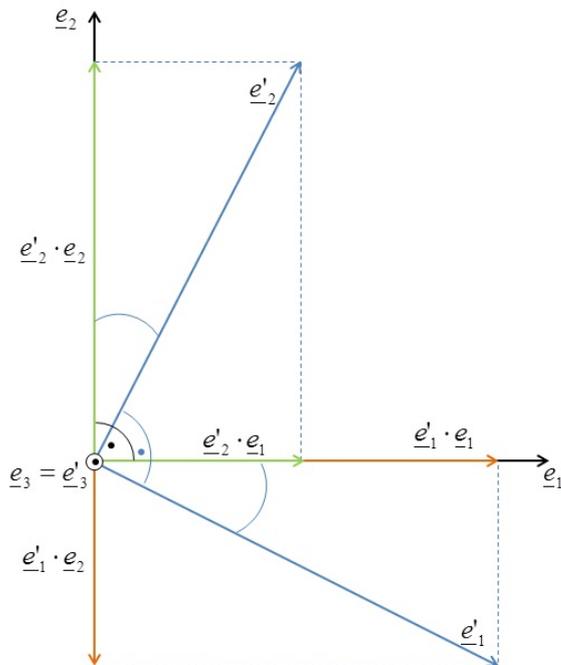
$$\text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Es soll noch eine kurze Erinnerung an das Skalarprodukt gegeben werden. Dieses ist für zwei Vektoren  $\underline{a}$  und  $\underline{b}$  definiert durch:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \varphi(\underline{a}, \underline{b})$$

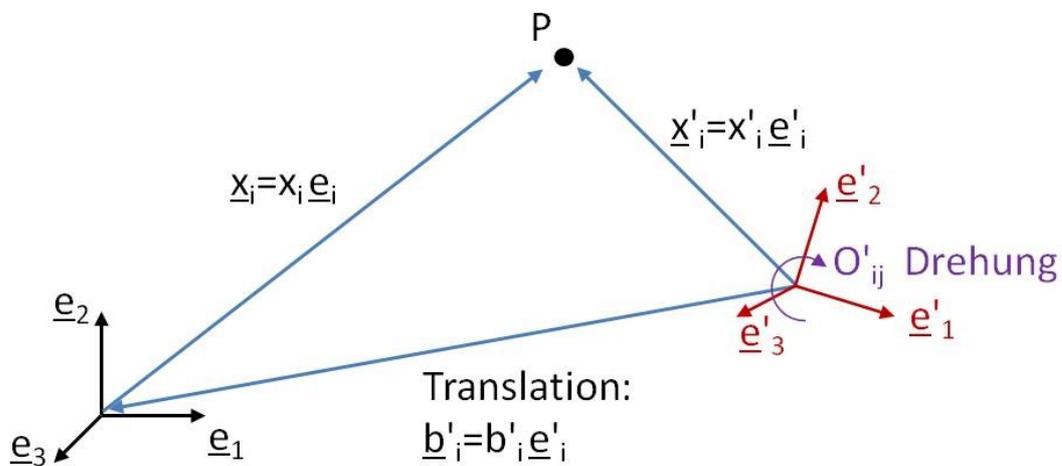
Das Skalarprodukt mit einem Einheitsvektor kann als senkrechte Projektion eines Vektors auf den entsprechenden

Einheitsvektor verstanden werden, wie es in der unteren Abbildung dargestellt ist.



**Bild:** Senkrechte Projektion.

Die euklidischen Transformation ist auch als allgemeine Beobachtertransformation bekannt. Jeder Punkt P im Raum besitzt bezüglich eines Koordinatensystems (z.B.  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -System) einen Ortsvektor. Verändert sich der Beobachtungspunkt in Form des Koordinatenursprungs mit einer Translation und Rotation (z.B.  $x'_1$ - $x'_2$ - $x'_3$ -System), lässt sich der Ortsvektor im "neuen" System über den Ortsvektor im "alten" System und eine Drehmatrix bestimmen.



**Bild:** Euklidische Transformation.

Bei der Drehmatrix  $O'_{ij}$  handelt es sich dabei um eine orthonormale Transformation, die die neuen Basisvektoren  $\underline{e}'_i$  auf die alten Basisvektoren  $\underline{e}_i$  abbildet. Die Definition der Drehmatrix lautet somit:

$$\underline{O}' = O'_{ij} = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j.$$

Die Drehmatrix entspricht somit dem Skalarprodukt vom neuen mit dem alten Basisvektor.

Es soll nun der Ortsvektor des beliebigen Punktes P transformiert werden. Zunächst soll dabei vom ungestrichenem "alten" Basissystem in das gestrichene "neue" System transformiert werden.

$$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{b}' \quad \text{bzw.} \quad x'_i \underline{e}'_i = x_j \underline{e}_j + b'_k \underline{e}'_k$$

$$x'_i \underline{e}'_i - b'_k \underline{e}'_k = x_j \underline{e}_j$$

$$\Rightarrow (x'_i - b'_i) \underline{e}'_i = x_j \underline{e}_j \quad | \cdot \underline{e}'_k$$

$$\Rightarrow (x'_i - b'_i) \underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_k = x_j \underline{e}_j \cdot \underline{e}'_k$$

$$\Rightarrow (x'_i - b'_i) \delta_{ik} = x_j O'_{kj}$$

$$\Rightarrow (x'_k - b'_k) = x_j O'_{kj}$$

$$\Rightarrow x'_k = x_j O'_{kj} + b'_k.$$

Für die Umrechnung vom gestrichenem "neuem" Basissystem auf das "alte" System ist das Vorgehen analog:

$$x_i = O'_{ji}(x'_j - b'_j).$$

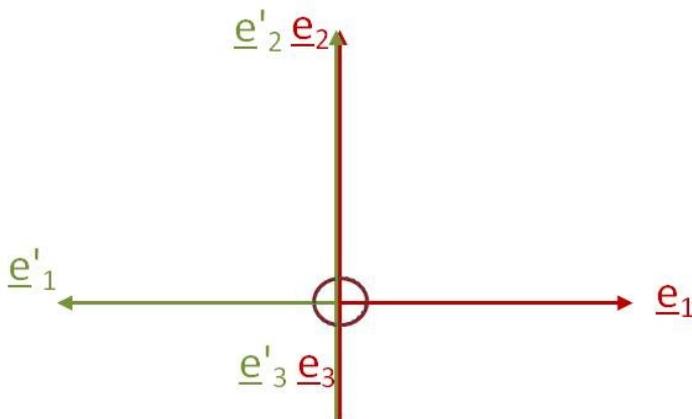
Zur besseren Veranschaulichung der Transformation sollen nun zwei Beispiele berechnet werden. Dies wird an den [Beispielen Spiegelung und Drehung](#) gezeigt.

Die Transformationen werden im Anschluss dafür benötigt um die Einträge der Steifigkeitsmatrix aufgrund von [Symmetriebedingungen im Material](#) zu reduzieren.

## Beispiele: Spiegelung und Drehung

### Beispiel 1: Spiegelung

Als erstes Beispiel soll eine Spiegelung des Koordinatensystems an der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene gezeigt werden.



**Bild:** Spiegelung an der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene.

Es werden zuerst die Einträge der Transformationsmatrix mit Hilfe der senkrechten Projektion bestimmt:

$$O'_{11} = \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_1 = -1,$$

$$O'_{21} = \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}_1 = 0,$$

$$O'_{12} = \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_2 = 0,$$

$$O'_{22} = \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}_2 = 1 \quad \text{und}$$

$$O'_{33} = \underline{e}'_3 \cdot \underline{e}_3 = 1$$

$$\Rightarrow O'_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

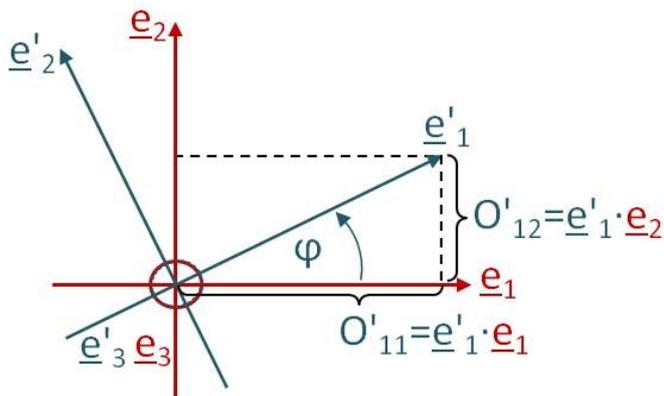
Zur Kontrolle kann die Determinante der Transformationsmatrix berechnet werden. Diese muss bei einer Spiegelung gleich minus Eins sein:

$$\det[\underline{O}'_{ij}] = -1.$$

Für dieses Beispiel ist die Bedingung erfüllt.

### Beispiel 2: Drehung

Als weiteres Beispiel soll die Transformation bei einer Drehung des Koordinatensystems gezeigt werden. Die Drehung in diesem Beispiel erfolgt dabei in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und somit um die  $x_3$ -Achse.



**Bild:** Drehung.

Eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn, also linksdrehend, entspricht dabei einer mathematisch positiven Drehung:

$$O'_{11} = \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_1 = \cos\varphi,$$

$$O'_{12} = \underline{e}'_1 \cdot \underline{e}_2 = \sin\varphi,$$

$$O'_{21} = \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}_1 = -\sin\varphi,$$

$$O'_{22} = \underline{e}'_2 \cdot \underline{e}_2 = \cos\varphi \text{ und}$$

$$O'_{33} = \underline{e}'_3 \cdot \underline{e}_3 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{O}'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Auch hier existiert die Möglichkeit zur Kontrolle des Ergebnisses über die Determinante der Drehmatrix. Bei einer Drehung muss diese gleich eins sein.

### Materialsymmetrien

Aufgrund von Materialsymmetrien können mit Hilfe von Transformationsmatrizen die bisherigen 21 unabhängigen Einträge der Steifigkeitsmatrix weiter reduziert werden. Dieses Vorgehen wird nun für [monoklines](#), [orthotropes](#), [transversal-isotropes](#) und [isotropes](#) Material aufgezeigt.

Für die Vereinfachung werden die Steifigkeitsmatrizen transformiert. Dafür werden die symmetriebeschreibenden Drehmatrizen auf die Steifigkeitsmatrix angewendet, wobei sich die unabhängigen Matrixeinträge reduzieren.

Für FVK-Strukturen ist insbesondere das transversal-isotropes Materialverhalten relevant, da das Grundelement also die unidirektionale Einzelschicht, diese Materialeigenschaft aufweist. Daher sind hier vorab die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen für ein transversal-isotropes Material mit parallelen Faser zur  $x_1$ -Achse aufgeführt:

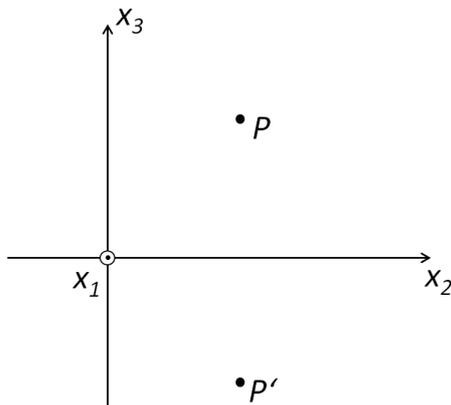
$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix}.$$

Die Einträge der Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{IJ}$  werden mit Hilfe der [Ingenieurskonstanten](#) berechnet.

### Symmetrie bezüglich einer Ebene - monoklin

Ein Material heißt monoklin, wenn sich die Materialeigenschaften symmetrisch bezüglich einer Ebene verhalten. Für die Reduzierung der Steifigkeitsmatrixeinträge wird willkürlich die  $(x_1-x_2)$ -Ebene als Symmetrieebene gewählt. Dies ist in der unteren Abbildung für einen exemplarischen Punkt  $P$  dargestellt.



**Bild:** Exemplarische Darstellung von monoklinem Materialverhalten.

Bei der Spiegelung an der Symmetrieebene tritt keine Veränderung des Materialverhaltens auf. Das Materialverhalten ist also invariant bei dieser Transformation in Form einer Spiegelung. Die Transformationsmatrix für diese Spiegelung lautet somit:

$$O'_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Die Materialsymmetrie fordert nun  $C_{ijkl}^P = C_{ijkl}^{P'}$ . Mit Hilfe von Transformationsbeziehungen lässt sich die Steifigkeitsmatrix des gespiegelten Punktes  $P'$  bestimmen:

$$C_{ijkl}^{P'} = C'_{ijkl} = O'_{ir} O'_{js} O'_{kt} O'_{ln} C_{rstn}.$$

Diese Gleichung wird nun für verschiedene Einträge ausgewertet. So zum Beispiel für  $C'_{1111}$ . Die Transformationsbeziehung lautet:

$$C'_{1111} = O'_{1r} O'_{1s} O'_{1t} O'_{1n} C_{rstn}.$$

Diese wird für die Indizes  $r, s, t$  und  $n$  expandiert. Außerdem werden sofort die Einträge  $O'_{12} = O'_{13} = 0$  eingesetzt. Damit erhält man für die Transformationsbeziehung:

$$C'_{1111} = O'_{11} O'_{11} O'_{11} O'_{11} C_{1111} \xrightarrow{O'_{11}=1} C'_{1111} = C_{1111}$$

$$C'_{1113} = o'_{11} o'_{11} o'_{11} o'_{33} C_{1113} \stackrel{o'_{11}=1, o'_{33}=-1}{\implies} C'_{1113} = -C_{1113}$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt wenn  $C'_{1113} = -C_{1113} = 0$  ist. Hierraus lässt sich folgendes Schema ableiten: Bei einer ungeraden Anzahl des Index 3 in dem Steifigkeitstensor, können die Einträge zu null gesetzt werden. Somit hat die Steifigkeitsmatrix eines monoklinen Materials **13 unabhängige Einträge**.

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & \text{sym.} & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix lautet somit:

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ & \text{sym.} & & S_{44} & S_{45} & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

### Symmetrie bezüglich zwei bzw. drei Ebenen - orthotrop

Bei einem orthotropen Material liegt eine Materialsymmetrie bzgl. zwei (und somit auch bzgl. drei) senkrecht aufeinander stehender Ebenen vor. Ausgehend vom monoklinen Material wird zusätzlich die  $(x_2-x_3)$ -Ebene herangezogen.

Hierfür ergibt sich folgende Transformationsmatrix:

$$o'_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe des Schema können hier die Steifigkeitseinträge mit ungerader Anzahl des tensoriellen Indexwertes 1 zu null gesetzt werden. Die Steifigkeitsmatrix eines orthotropen Materials besitzt somit **9 unabhängige Einträge**.

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Die Nachgiebigkeitsmatrix lautet:

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$$

### Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse - transversal-isotrop

Es handelt sich um ein transversal-isotropes Material, wenn zusätzlich zur Orthotropie eine Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse vorliegt. Dieses Materialverhalten liegt beispielsweise bei unidirektionalen Einzelschichten vor. Bei transversal-isotropen Materialien können die Einträge der Steifigkeitsmatrix ausgehend von der Steifigkeitsmatrix des orthotropen Materials reduziert werden. Dafür wird eine Drehmatrix aufgestellt, die eine Rotation um die  $x_1$ -Achse abbildet.

$$O'_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Jetzt wird beispielhaft der Eintrag  $C'_{1133}$  der transformierten Steifigkeitsmatrix berechnet:

$$C'_{1133} = O'_{1r} O'_{1s} O'_{3t} O'_{3n} C_{rstn}.$$

Diese Beziehung wird nun über die Indizes  $r$  und  $s$  expandiert. Dabei wird sofort verwendet, dass  $O'_{12} = O'_{13} = 0$  gilt.

$$C'_{1133} = O'_{11} O'_{11} O'_{3t} O'_{3n} C_{11tn}$$

Nun wird zuerst über den Index  $t$  und dann über  $n$  expandiert. Auch hierbei wird der Eintrag  $O'_{3t}$  gleich Null sind.

$$\begin{aligned} C'_{1133} &= O'_{11} O'_{11} O'_{32} O'_{3n} C_{112n} + O'_{11} O'_{11} O'_{33} O'_{3n} C_{113n} \\ &= O'_{11} O'_{11} O'_{32} O'_{32} C_{1122} + O'_{11} O'_{11} O'_{32} O'_{33} C_{1123} + \dots \\ &\quad O'_{11} O'_{11} O'_{33} O'_{32} C_{1132} + O'_{11} O'_{11} O'_{33} O'_{33} C_{1133} \end{aligned}$$

Nun werden die Einträge der Transformationsmatrix eingesetzt:

$$C'_{1133} = \sin^2\alpha C_{1122} + \cos^2\alpha C_{1133}.$$

Diese Gleichung wird nun für exemplarische Winkel ausgewertet. Dafür wird zunächst der Winkel  $\alpha = 0^\circ$  gewählt. Für diesen Winkel erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen den Einträgen der Steifigkeitsmatrix des transformierten und des Ausgangspunkt:

$$C'_{1133} = C_{1133}.$$

Wird die obere Gleichung für den Winkel  $\alpha = 90^\circ$  ausgewertet, erhält man den folgenden Zusammenhang:

$$C'_{1133} = C_{1122}.$$

Da die Einträge  $C'_{1133}$  bei den Auswertungen mit den beiden Winkeln gleich ist (dieser gilt für den identischen transformierten Punkt  $P'$ ), muss somit auch

$$C_{1133} = C_{1122}$$

gelten. In der Superindexschreibweise geschrieben heißt das:

$$C_{13} = C_{12}.$$

In der analogen Vorgehensweise kann gezeigt werden das

$$C_{33} = C_{22},$$

$$C_{55} = C_{66} \text{ und}$$

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$$

gilt.

Somit reduziert sich die Anzahl der Einträge der Steifigkeitsmatrix für ein transversal-isotropes Material auf **5 unabhängige Einträge**.

Die Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrix lautet somit:

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{bmatrix} \text{ und}$$

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix}.$$

## Bestimmung der Einträge der Nachgiebigkeitsmatrix

Durch die Betrachtung der Materialsymmetrien ist die Struktur der Steifigkeitsmatrix bekannt. Es ist nun von Interesse die genauen Einträge durch die Ingenieurkonstanten auszudrücken. Dafür sind zwei Arten von gedanklichen "Experimenten" notwendig:

- (a) einachsige Zugversuche und
- (b) Scherversuche.

Es wird im Folgenden ein transversal-isotropes Material betrachtet, welches eine Rotationssymmetrie bezüglich der  $x_1$ -Achse aufweist. Das Materialgesetz lautet:

$$\epsilon_I = C_{JI}^{-1} \sigma_J = S_{IJ} \sigma_J$$

Hierbei wurde das Materialgesetz mit der Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{IJ}$  verwendet, da in den gedanklichen "Experimenten" die Spannungen  $\sigma_J$  vorgegeben werden.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mit Hilfe der gedanklichen "Experimente" (zwei Zugversuche, ein Scherversuch) können die Einträge der Nachgiebigkeitsmatrix bestimmt werden.

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\nu_{12} \frac{1}{E_{22}} & -\nu_{12} \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21} \frac{1}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\nu_{23} \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21} \frac{1}{E_{11}} & -\nu_{23} \frac{1}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \frac{1+\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}.$$

Die Steifigkeitsmatrix ist die Inverse dieser Matrix.

Bei der Berechnung der Einträge der Nachgiebigkeitsmatrix ist zu beachten, dass auch die Querkontraktionszahl richtungsabhängig ist:

$$\nu_{12} \neq \nu_{21}.$$

Aufgrund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix sind die Einträge  $S_{12}$  und  $S_{21}$  gleich. Somit entspricht das Verhältnis der Querkontraktionszahlen dem Verhältnis der Elastizitätsmodule:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{21}} = \frac{E_{22}}{E_{11}}.$$

## Zugversuch in $x_1$ -Richtung

In diesem Abschnitt wird der **einachsige Zugversuch in  $x_1$ -Richtung** untersucht. Hierfür gilt  $\sigma_1 \neq 0$  und für alle anderen Spannungen gilt  $\sigma_j = 0$ . Die Gleichung (1) wird nun für diese Bedingung ausgewertet:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die ersten drei Zeilen ausmultipliziert liefert:

$$1. \text{ Zeile: } \epsilon_1 = S_{11}\sigma_1, \quad (2)$$

$$2. \text{ Zeile: } \epsilon_2 = S_{21}\sigma_1, \quad (3)$$

$$3. \text{ Zeile: } \epsilon_3 = S_{31}\sigma_1. \quad (4)$$

Mit  $\sigma_1 = E_{11}\epsilon_1$  folgt aus Gleichung (2):

$$S_{11} = \frac{1}{E_{11}}.$$

Mit der Definition der Querkontraktionszahl:

$$\nu_{21} = -\frac{\epsilon_Q}{\epsilon_{ax}} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -\frac{S_{21}}{S_{11}} \text{ folgt}$$

$$S_{21} = -\nu_{21}S_{11} = -\nu_{21}\frac{1}{E_{11}}.$$

Aufgrund der Symmetrie gilt:

$$S_{31} = S_{13}$$

$$S_{13} = S_{21} = S_{12}.$$

## Zugversuch in $x_2$ -Richtung

Als nächstes wird der **einachsige Zugversuch in  $x_2$ -Richtung** untersucht. Für diesen Zugversuch gilt  $\sigma_2 \neq 0$  und für alle anderen Spannungen gilt  $\sigma_j = 0$ . Die Gleichung (1) wird nun für diese Bedingung ausgewertet:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die ersten drei Zeilen ausmultipliziert liefern:

$$1. \text{ Zeile: } \epsilon_1 = S_{12}\sigma_2, \quad (2)$$

$$2. \text{ Zeile: } \epsilon_2 = S_{22}\sigma_2, \quad (3)$$

$$3. \text{ Zeile: } \epsilon_3 = S_{32}\sigma_2. \quad (4)$$

Mit  $\sigma_2 = E_{22}\epsilon_2$  folgt aus Gleichung (3):

$$S_{22} = \frac{1}{E_{22}}.$$

Mit der Definition der Querkontraktionszahl:

$$\nu_{12} = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \text{ folgt nun}$$

$$S_{12} = -\nu_{12} S_{22} = -\nu_{12} \frac{1}{E_{22}}$$

Aufgrund der Symmetrie des transversal-isotropen Materials gilt:

$$\nu_{32} = -\frac{S_{32}}{S_{22}}$$

$$S_{32} = -\nu_{32} S_{22}$$

$$S_{32} = -\nu_{32} \frac{1}{E_{22}}$$

### Scherversuch

Für den Scherversuch gilt  $\sigma_5 \neq 0$  und für alle anderen Spannungen  $\sigma_J = 0$ . Multipliziert man die 5. Zeile aus erhält man:

$$\epsilon_5 = S_{55} \sigma_5$$

Mit der Definition des Schubmoduls folgt daraus:

$$S_{55} = \frac{1}{G_5} = \frac{1}{G_{12}}$$

### Rotationssymmetrie bezüglich zwei Achsen - isotrop

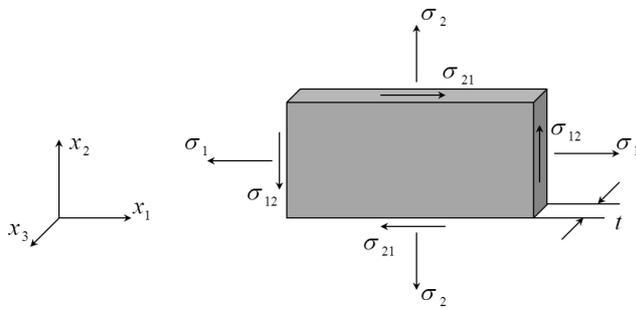
Sind die Materialeigenschaften rotationssymmetrisch bezüglich zwei Achsen so handelt es sich um ein isotropes Material. Ein solches Material lässt sich mit **zwei unabhängigen Einträgen** in der Steifigkeitsmatrix beschreiben:

$$C_{IJ} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}.$$

### Der ebene Spannungszustand

Der ebene Spannungszustand wird bei dünnwandigen Strukturen angenommen. Diese Strukturen können keine Belastung senkrecht zur Ebene aufnehmen. Daher werden im ebenen Spannungszustand die Einträge  $\sigma_{i3}$  und  $\sigma_{3i}$  des Spannungstensor zu Null angenommen. Spannungen liegen demnach nur in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene vor. Die Einträge des Spannungstensors in Superindexschreibweise lauten:

$$\sigma_I = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}.$$



**Bild:** Ebener Spannungszustand.

Bei einem ebenen Spannungszustand treten nur Spannungen in einer Ebene auf, Verzerrungen können allerdings durch die Querkontraktion in allen drei Raumrichtungen auftreten. Aus einem ebenen Spannungszustand ergibt sich daher ein dreidimensionaler Verzerrungszustand.

Die Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{IJ}$  kann im ebenen Spannungszustand zu einer 3x3 Matrix  $S_{IJ,red}$  vereinfacht werden:

$$S_{IJ,red} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}.$$

Beachtet werden muss das sich bei einem ebenen Spannungszustand ein räumlicher Verzerrungszustand einstellt. Für die **vollständige** Berechnung des Verzerrungszustand muss die gesamte Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{IJ}$  verwendet werden.

Bei **gegebenen Spannungen und gesuchten Verzerrungen** kann die reduzierte Nachgiebigkeitsmatrix verwendet werden:

$$\epsilon_J = S_{IJ,red} \sigma_I$$

$$\text{mit } S_{IJ,red} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

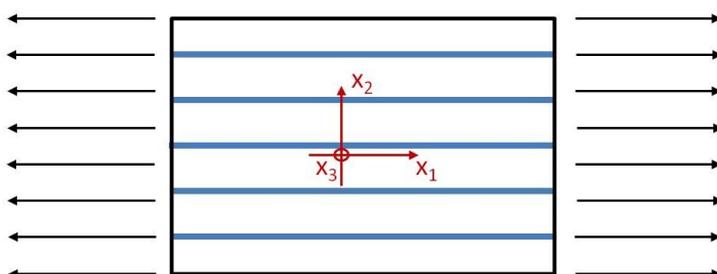
Bei **gegebenen Verzerrung und gesuchten Spannungen** wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix verwendet, die im ebenen Spannungszustand mit  $Q_{IJ} = C_{IJ,red}$  bezeichnet wird.

$$\sigma_I = Q_{IJ} \epsilon_J$$

$$\text{mit } Q_{IJ} = C_{IJ,red} \text{ und } Q_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}.$$

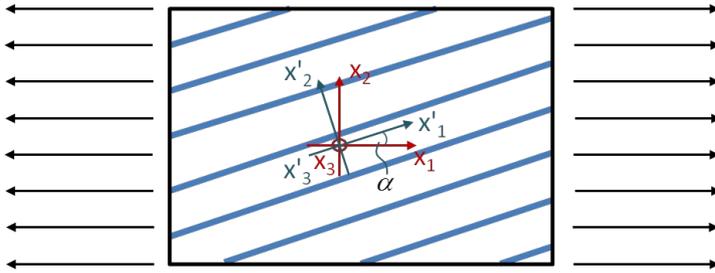
## Polartransformationen

Bisher stimmte das Belastungsachsensystem mit der Faserorientierung überein.



**Bild:** Draufsicht auf eine UD-Schicht wobei das Material- und Belastungsachsensystem übereinstimmt.

Bei Kompositen befinden sich die Einzelschichten oft mit unterschiedlichen zueinander. Das Belastungsachsensystem, auch als globales System bezeichnet, und das Materialachsensystem einer UD-Schicht sind also um einen Winkel  $\alpha$  gedreht.



**Bild:** Draufsicht auf eine UD-Schicht wobei das Material- und Belastungsachsensystem um einen Winkel  $\alpha$  gedreht verdreht sind.

Um nun den Widerstand des Materials im Belastungsachsensystem  $(x_1, x_2)$  zu erhalten, ist eine Transformation notwendig. Die Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrix ist somit abhängig von dem Drehwinkel  $\alpha$ .

Der Faserwinkel  $\alpha$  ist dabei üblicherweise für eine Einzelschicht im Mehrschichtverbund fest angegeben und kann der Bezeichnung des MSV entnommen werden. Der Faserwinkel wird als positiv bezeichnet, wenn eine mathematisch positive Drehung (also gegen den Uhrzeigersinn) vorliegt. Für eine klare Unterscheidung zwischen dem Belastungsachsensystem und dem Materialachsensystem wird nun eine Umbenennung vorgenommen. Im Folgenden wird das Belastungsachsensystem mit  $(x_1, x_2, x_3)$  und das Materialachsensystem mit  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  bezeichnet. Die Drehmatrix für eine mathematisch positive Drehung lautet:

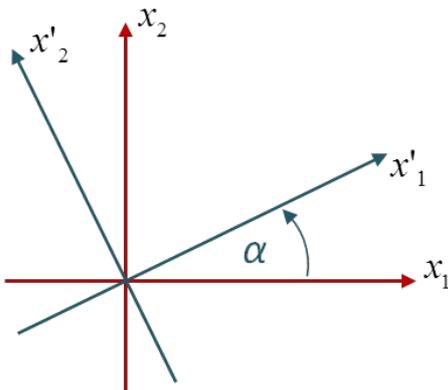
$$O'_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die genaue Vorgehensweise für das Aufstellen einer Drehmatrix ist im Abschnitt [Euklidische Transformation](#) dargestellt. Im Folgenden sollen außerdem die Abkürzungen  $c = \cos\alpha$  und  $s = \sin\alpha$  in den Dreh- und Transformationsmatrizen verwendet werden. Um die Spannungen und Verzerrungen zu transformieren, ist eine zweifache Anwendung der Drehmatrix notwendig. Das Ziel ist es nun die zwei Drehmatrizen zu einer Transformationsmatrix zusammenzufassen. Mit den Transformationsmatrizen für die [Spannungs-](#) und [Verzerrungstransformation](#) können im Anschluss die **Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen** im Belastungsachsensystem bestimmt werden und somit das Elastizitätsgesetz im globalen Belastungsachsensystem aufgestellt werden.

## Spannungstransformation

Für die Spannungstransformation vom **Belastungsachsensystem  $(x_1-x_2)$  in das Materialachsensystem  $(x'_1-x'_2)$**  gilt:

$$\sigma'_{ij} = O'_{ik} O'_{jl} \sigma_{kl}$$



**Bild:** Transformation vom Belastungsachsen- und das Materialachsensystem.

Für den ebenen Spannungszustand folgt daraus:

$$\sigma'_{11} = o'_{11}o'_{11}\sigma_{11} + o'_{12}o'_{12}\sigma_{22} + (o'_{11}o'_{12} + o'_{12}o'_{11})\sigma_{12}.$$

Setzt man in diese Einträge nun die Einträge der Drehmatrix ein, erhält man:

$$\sigma'_{11} = c^2\sigma_{11} + s^2\sigma_{22} + 2cs\sigma_{12}.$$

Das Vorgehen für die Transformation der Spannungen in das Materialachsensystem ist analog und liefert:

$$\sigma'_{22} = s^2\sigma_{11} + c^2\sigma_{22} - 2cs\sigma_{12} \text{ und}$$

$$\sigma'_{12} = -cs\sigma_{11} + cs\sigma_{22} + (c^2 - s^2)\sigma_{12}.$$

Die drei Gleichungen können auch in der Matrixschreibweise zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}.$$

Somit erhält man die Transformationsmatrix für die Umrechnung der Spannungen vom  $(x_1-x_2)$ -KOS in das  $(x'_1-x'_2)$ -KOS:

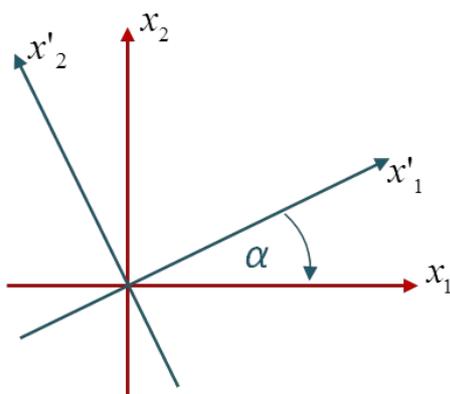
$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

In der einschlägigen Fachliteratur [1] wird das Belastungsachsensystem mit  $(x, y, z)$  und folglich diese Matrix mit  $[T]_{xy \rightarrow 1,2}^\sigma$  bezeichnet.

Da der Faserwinkel fest angegeben wird, ist für die Rücktransformation die inverse Beziehung notwendig.

Für die Spannungstransformation **vom Materialachsensystem  $(x'_1-x'_2)$  in das Belastungsachsensystem  $(x_1-x_2)$**  erhält man mit der analogen Vorgehensweise in der Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{bmatrix}.$$



**Bild:** Transformation vom Materialachsen- in das Belastungsachsensystem.

Diese Transformationsmatrix entspricht der Inversen von  $[T]$ :

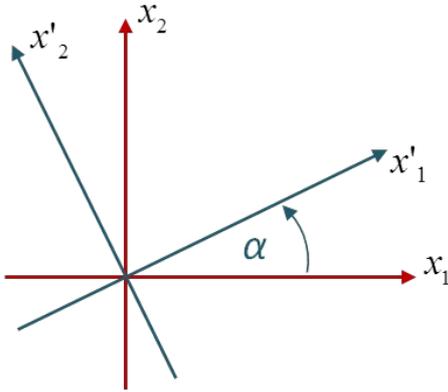
$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

In der einschlägigen Fachliteratur [1] wird diese Matrix mit  $[T]_{1,2 \rightarrow xy}^\sigma$  bezeichnet.

## Verzerrungstransformation

Die Verzerrungstransformation erfolgt ebenfalls mit der Drehmatrix. Hierbei muss der Faktor 2, aufgrund der Voigtschen Notation, beachtet werden. Für die Transformation **vom Belastungsachsensystem in das Materialachsensystem** folgt somit in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ 2\epsilon'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}.$$



**Bild:** Transformation vom Belastungsachsen- in das Materialachsensystem.

Die Transformationsmatrix ist für die Umrechnung der Verzerrungen mit  $[K]$  definiert:

$$[K] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

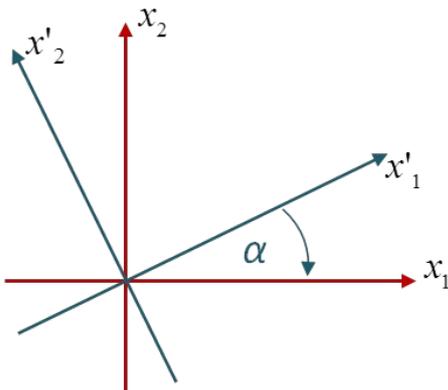
Es existiert dabei folgender Zusammenhang zwischen der Transformationsmatrix der Spannungen und der Transformationsmatrix der Verzerrungen:

$$[K] = [T^{-1}]^T.$$

In der einschlägigen Fachliteratur [1] wird diese Transformationsmatrix mit  $[T]_{x,y \rightarrow 1,2}^{\epsilon}$  bezeichnet.

Für die Transformation der Verzerrungen vom **Materialachsensystem in das Belastungsachsensystem** in der Matrixschreibweise gilt:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ 2\epsilon'_{12} \end{bmatrix}.$$



**Bild:** Transformation vom Materialachsen- in das Belastungsachsensystem.

Diese Transformationsmatrix entspricht der Inversen von  $[K]$  und somit auch der Transponierten von  $[T]$ :

$$[K]^{-1} = [T]^T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -cs \\ s^2 & c^2 & cs \\ 2cs & -2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}.$$

In der einschlägigen Fachliteratur [1] wird diese Transformationsmatrix mit  $[T]_{1,2 \rightarrow x,y}^E$  bezeichnet.

## Polartransformation der Nachgiebigkeitsmatrix

Mit den Transformationsmatrizen für die Spannungen und Verzerrungen soll nun das Elastizitätsgesetz im Belastungsachsensystem aufgestellt werden. Bisher ist das Elastizitätsgesetz nur im lokalen, also im Materialachsensystem bekannt und lautet:

$$\{\epsilon'\} = [S']\{\sigma'\}. \quad (1)$$

Die Transformation der Verzerrung vom Materialachsensystem in das globale System ist aus der [Verzerrungstransformation](#) bekannt:

$$\{\epsilon\} = [T]^T\{\epsilon'\}. \quad (2)$$

Nun wird Gleichung (1) in Gleichung (2) eingesetzt:

$$\{\epsilon\} = [T]^T[S']\{\sigma'\}. \quad (3)$$

In Gleichung (3) muss nun noch die Spannung vom Materialachsensystem in das Belastungsachsensystem transformiert werden. Diese Transformation ist bereits im Abschnitt [Spannungstransformation](#) gezeigt worden:

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\}. \quad (4)$$

Es kann jetzt Gleichung (4) in Gleichung (3) eingesetzt werden:

$$\{\epsilon\} = [T]^T[S'][T]\{\sigma\}. \quad (5)$$

In Gleichung (5) steht nun die Definition der Nachgiebigkeitsmatrix im Belastungsachsensystem  $[\bar{S}]$  zu erkennen:

$$[\bar{S}] = [T]^T[S'][T].$$

Es muss besonders darauf geachtet werden, dass bei der Nachgiebigkeitsmatrix im Materialachsensystem  $[S']$  die Einträge  $S_{16}$  und  $S_{26}$  für transversal-isotrope Materialien gleich Null sind. Die Einträge  $\bar{S}_{16}$  und  $\bar{S}_{26}$  der Nachgiebigkeitsmatrix im Belastungsachsensystem  $[\bar{S}]$  sind ungleich Null.

Die Transformation der Nachgiebigkeitsmatrix vom Materialachsensystem in das Belastungsachsensystem lautet:

$$\begin{bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{xs} \\ S_{yy} \\ S_{ys} \\ S_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2c^2s^2 & s^4 & c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^4 + s^4 & c^2s^2 & -c^2s^2 \\ 2c^3s & -2cs(c^2 - s^2) & -2cs^3 & -cs(c^2 - s^2) \\ s^4 & 2c^2s^2 & c^4 & c^2s^2 \\ 2cs^3 & 2cs(c^2 - s^2) & -2c^3s & cs(c^2 - s^2) \\ 4c^2s^2 & -8c^2s^2 & 4c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S'_{11} \\ S'_{12} \\ S'_{22} \\ S'_{66} \end{bmatrix}$$

## Polartransformation der Steifigkeitsmatrix

Das Vorgehen für die Polartransformation der Steifigkeitsmatrix ist analog zur Transformation der Nachgiebigkeitsmatrix. Der Ausgangspunkt der Berechnung ist das Elastizitätsgesetz im Materialachsensystem. Da der Spannungszustand einer UD-Einzelschicht betrachtet wird und dieser als ebener Spannungszustand angenommen werden kann, wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix im Materialachsensystem  $[Q']$  verwendet:

$$\{\sigma'\} = [Q']\{\epsilon'\}. \quad (1)$$

Für die Transformation der Spannungen vom Material- in das Belastungsachsensystem gilt:

$$\{\sigma\} = [T]^{-1}\{\sigma'\}. \quad (2)$$

In diese Beziehung wird Gleichung (1) eingesetzt:

$$\{\sigma\} = [T]^{-1}[Q']\{\epsilon'\}. \quad (3)$$

In Gleichung (3) muss noch die Verzerrung im Materialachsensystem  $\{\epsilon'\}$  in das Belastungsachsensystem transformiert werden:

$$\{\epsilon'\} = [T^{-1}]^T \{\epsilon\}. \quad (4)$$

Setzt man Gleichung (4) in Gleichung (3) ein erhält man:

$$\{\sigma\} = [T]^{-1}[Q'] [T^{-1}]^T \{\epsilon\} \quad (5)$$

in der man die Definition der reduzierten Steifigkeitsmatrix im Belastungsachsensystem findet:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q'] [T^{-1}]^T.$$

Die Transformation der reduzierten Steifigkeitsmatrix vom Material- in das Belastungsachsensystem lautet:

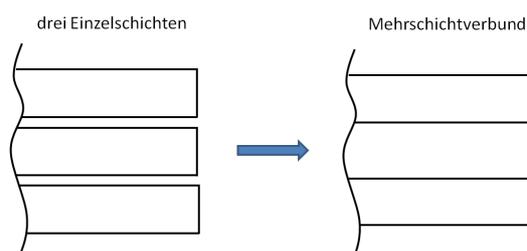
$$\begin{bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{xy} \\ Q_{xs} \\ Q_{yy} \\ Q_{ys} \\ Q_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2c^2s^2 & s^4 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^4 + s^4 & c^2s^2 & -4c^2s^2 \\ c^3s & -cs(c^2 - s^2) & -cs^3 & -2cs(c^2 - s^2) \\ s^4 & 2c^2s^2 & c^4 & 4c^2s^2 \\ cs^3 & cs(c^2 - s^2) & -c^3s & 2cs(c^2 - s^2) \\ c^2s^2 & -2c^2s^2 & c^2s^2 & (c^2 - s^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_{11} \\ Q'_{12} \\ Q'_{22} \\ Q'_{66} \end{bmatrix}$$

### Skalenebene 3: Mehrschichtverbund (MSV)

Der Mehrschichtverbund wird mit Hilfe der klassischen Laminattheorie beschrieben, diese wird in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Mit dieser 2-D-Kontinuumstheorie wird das globale Verhalten eines Mehrschichtverbundes auf eine Beanspruchung untersucht. Ein Mehrschichtverbund setzt sich dabei aus mehreren Einzelschichten zusammen. Die Einzelschichten können dabei unterschiedliche Faserorientierungen aufweisen, wodurch die gewünschten Materialeigenschaften konfiguriert werden können.

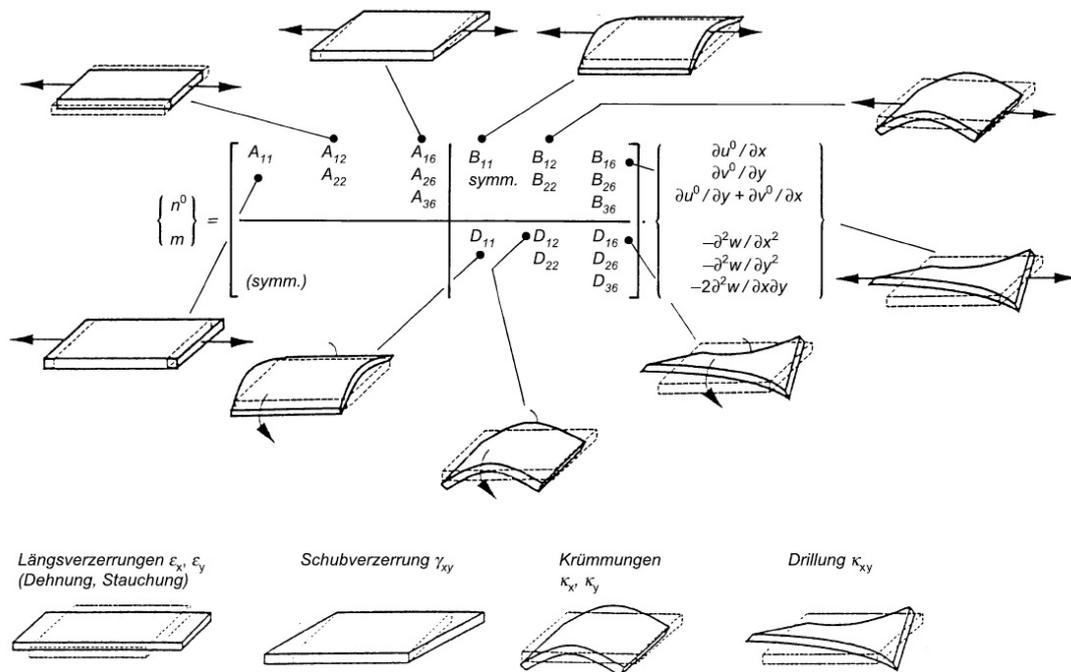
Ziele der klassischen Laminattheorie sind:

- ein Gesamtelastizitätsgesetz für einen Mehrschichtverbund und
- eine schichtenweise Spannungsanalyse.



**Bild:** Von der Einzelschicht zum Mehrschichtverbund.

Der Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung erfolgt mit der Steifigkeitsmatrix. In der unteren Abbildung sind die Einflüsse der Koeffizientenmatrixeinträge bezüglich der Verformung dargestellt.



**Bild:** Auswirkungen der Koeffizienten und Darstellung der Verformungen [4].

Die Steifigkeitsmatrix setzt sich aus den Untermatrizen zusammen, die im Folgenden hergeleitet werden:

Scheibensteifigkeitsmatrix  $[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} t^{(k)}$ ,

Plattensteifigkeitsmatrix  $[D] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} \left\{ \frac{(t^{(k)})^3}{12} + t^{(k)} \left( \frac{z^{(k)}}{m} \right)^2 \right\}$  und

Koppelsteifigkeitsmatrix  $[B] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} t^{(k)} \frac{z^{(k)}}{m}$ .



### Struktur von Kapitel 3

- Kodierung eines MSV
- Annahmen
- Scheibensteifigkeitsmatrix [A]
  - schichtenweise Spannungsanalyse
- Sonderfälle
- Plattensteifigkeitsmatrix [D]
- Koppelsteifigkeitsmatrix [B]

## Kodierung eines MSV

Ein Mehrschichtverbund besteht aus mehreren unidirektionalen Einzelschichten die verschiedene Faserwinkel aufweisen können. Die Beschreibung des Schichtaufbaus erfolgt anhand folgender Kodierung:

1. Die Kodierung besteht aus den Winkelangaben für die Einzelschichten.
2. Die Faserorientierung ist dabei auf die x-Achse des Bauteils bezogen und durch Schrägstriche getrennt. Eine mathematisch positive Drehung der Faserorientierung entspricht dabei einem positiven Winkel.
3. Die erste Angabe in der Kodierung entspricht der Winkelangabe der ersten Schicht,
4. die Zählung der Schichten beginnt dabei mit der ersten eingelegten Schicht.
5. Auch die Verwendung von verschiedenen Fasertypen kann mittels Indizes kenntlich gemacht werden.
6. Zur Vereinfachung sollen nur mittensymmetrisch geschichtete Mehrschichtverbunde betrachtet werden. Bei einem solchen Aufbau ist die Winkelangabe der ersten Hälfte ausreichend. Dass es sich um einen mittensymmetrischen Aufbau handelt wird durch den Index "S" kenntlich gemacht.
7. Bei einer ungeraden Anzahl von Schichten wird die mittlere Schicht per Überstrich gekennzeichnet.

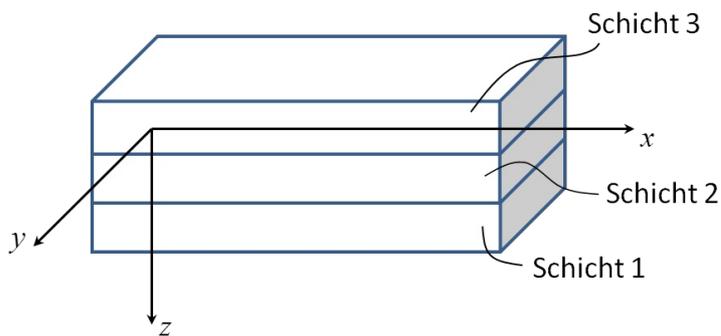
Beispiel:

- Für einen Mehrschichtverbund mit drei Schichten, wobei die beiden äußeren einen Faserwinkel von  $0^\circ$  und die mittlere Schicht einen Faserwinkel von  $-45^\circ$  aufweisen:

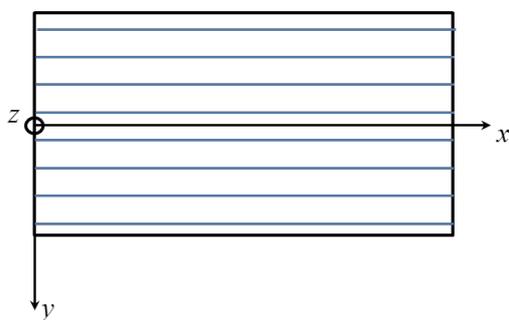
$$[0^\circ/45^\circ/0^\circ],$$

- bzw. in der abgekürzten Form für mittensymmetrisch geschichtete Mehrschichtverbunde:

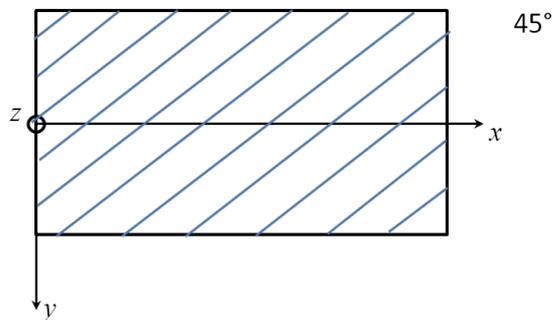
$$[0^\circ/\overline{45^\circ}]_S.$$



Draufsicht Schicht 1 = Schicht 3



Draufsicht Schicht 2



**Bild:** Beispiel für die Kodierung eines Mehrschichtverbundes.

## Annahmen

Für die klassische Laminattheorie müssen zunächst einige Annahmen getroffen werden:

- ebener Spannungszustand,
- ebene und parallele Einzelschichten mit konstanter Dicke,

- kleine Verformungen,
- Mehrschichtverbund ist zur Mittelebene symmetrisch geschichtet.

Im weiteren Verlauf werden die Größen von Einzelschichten mit dem Index  $(k)$  versehen. Alle den Mehrschichtverbund betreffende Größen werden mit  $(\square)$  gekennzeichnet. In der VDI-Richtlinie für Bauteile aus Faser-Kunststoff-Verbunden (VDI 2014 [4]) wird hierfür  $(\square)$  verwendet.

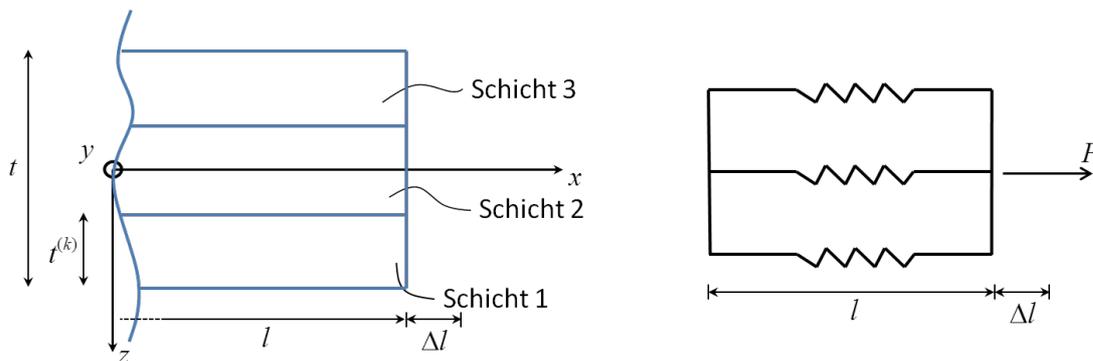
## Scheibensteifigkeitsmatrix [A]

Scheiben werden nur durch Kräfte in der Ebene belastet. Für die Herleitung der Scheibensteifigkeitsmatrix werden wieder die bekannten **drei Schritte der Elastostatik** angewendet:

- geometrische Beziehungen/ Kinematik,
- Gleichgewicht/ Kräftegleichgewicht und
- Werkstoffgesetz.

### (i) Kinematik

Ein Mehrschichtverbund kann in der Ebene als eine Federparallelschaltung modelliert werden. Die einzelnen Federsteifigkeiten werden durch die Steifigkeiten der Einzelschichten bezogen auf das Belastungsachsensystem dargestellt. Dies ist in der unteren Abbildung exemplarisch für ein Mehrschichtverbund mit drei Einzelschichten dargestellt.



**Bild:** Exemplarische Darstellung eines Mehrschichtverbunds mit drei Einzelschichten für die Herleitung der Scheibensteifigkeitsmatrix.

Durch die Parallelschaltung ist die Gesamtdehnung, also die Dehnung des Mehrschichtverbunds, identisch mit der Dehnung der Einzelfedern und somit der Dehnung der Einzelschichten.

	MSV	Einzelschicht
x- Richtung	$\widehat{\epsilon}_x$	$\epsilon_x^{(1)} = \epsilon_x^{(2)} = \epsilon_x^{(3)} = \epsilon_x^{(k)}$
y- Richtung	$\widehat{\epsilon}_y$	$\epsilon_y^{(k)}$
Scherung	$2\widehat{\epsilon}_{xy}$	$2\epsilon_{xy}^{(k)}$

$$\Rightarrow \{\widehat{\epsilon}\} = \{\epsilon\}^{(k)} \quad (1)$$

### (ii) Gleichgewicht

Bei einer Federparallelschaltung entspricht die außenanliegende Kraft der Summe der Kräfte in den Einzelschichten.

	MSV	Einzelschicht
x-Richtung	$\widehat{F}_x$	$F_x^{(1)} + F_x^{(2)} + F_x^{(3)}$
		$\sigma_x b t = \sigma_x^{(1)} b t^{(1)} + \sigma_x^{(2)} b t^{(2)} + \sigma_x^{(3)} b t^{(3)}$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}_x t = \sum_{k=1}^n \sigma_x^{(k)} t^{(k)}$$

y-Richtung  $\bar{\sigma}_y t = \sum_{k=1}^n \sigma_y^{(k)} t^{(k)}$

Scherung  $\bar{\sigma}_{xy} t = \sum_{k=1}^n \sigma_{xy}^{(k)} t^{(k)}$

$$\Rightarrow \{\bar{\sigma}\} t = \sum_{k=1}^n \{\sigma\}^{(k)} t^{(k)} \quad (2)$$

### (iii) Werkstoffgesetz der Einzelschicht im Belastungsachsensystem

Das Werkstoffgesetz einer Einzelschicht im Belastungsachsensystem ist bereits bekannt:

$$\Rightarrow \{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)}. \quad (3)$$

Um nun das Elastizitätsgesetz des Mehrschichtverbunds zu erhalten wird zunächst Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt:

$$\{\bar{\sigma}\} t = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} t^{(k)}.$$

Wird nun die Dehnungen aus Gleichung (1) verwendet erhält man:

$$\{\bar{\sigma}\} t = \left( \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} t^{(k)} \right) \{\bar{\varepsilon}\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist die Definition der Scheibensteifigkeitsmatrix  $[A]$ :

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]^{(k)} t^{(k)}$$

bzw.

$$A_{IJ} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{IJ}^{(k)} t^{(k)}.$$

Das Gesamtelastizitätsgesetz eines Mehrschichtverbundes als Scheibenelement lautet nun mit der Definition des Kraftflusses  $\{\bar{n}\} = \{\bar{\sigma}\} t$ :

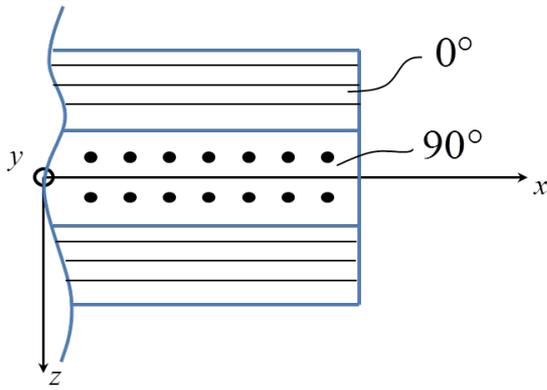
$$\Rightarrow \{\bar{n}\} = [A] \{\bar{\varepsilon}\}.$$

### Sonderfälle

Bei speziellen Schichtungen kann es zu Vereinfachungen in der Scheibensteifigkeitsmatrix kommen. Im Folgenden sollen drei Sonderfälle vorgestellt werden:

#### 1) Kreuzverbund (cross ply)

Bei einem Kreuzverbund werden die Lagen ausschließlich mit  $0^\circ$  und  $90^\circ$  geschichtet. Daraus folgt, dass die Einträge  $A_{16}$  und  $A_{26}$  gleich Null sind. Es kommt bei einem solchen Lagenaufbau zu keiner Kopplung von Längs- und Scherverformung.



**Bild:** Schematische Darstellung eines Kreuzverbunds.

## 2) symmetrisch ausgeglichenes Laminat (auch als ausgewogener Schichtverbund bezeichnet, balanced ply laminate)

Man spricht von einem sym. ausgeglichenen Laminat, wenn die Einzelschichten paarweise aber mit entgegengesetzten Winkeln auftreten. Ein Beispiel wäre:

$$[\theta_1 / -\theta_1 / \theta_2 / -\theta_2].$$

Die Reihenfolge der Einzelschichten ist dabei nicht relevant und kann beliebig gewählt werden. Unter diesen Umständen werden die Einträge  $A_{16}$  und  $A_{26}$  gleich Null. Diese Art von Laminat eignet sich für die Aufnahme von Schubbeanspruchung.

## 3) Quasi-isotrope Laminare

Es können die Faserwinkel so gewählt werden, dass sich das Laminat in der Ebene wie ein metallischer Werkstoff, also quasi-isotrop, verhält. Dann gilt für die Einträge der Scheibensteifigkeitsmatrix:

$$A_{11} \approx A_{22}, A_{16} = A_{26} = 0, A_{66} \approx \frac{A_{11} - A_{12}}{2}.$$

Ein quasi-isotropes Materialverhalten erhält man z.B. bei folgendem Schichtaufbau:

$$[0^\circ / 90^\circ / 45^\circ / -45^\circ].$$

## Schichtenweise Spannungsanalyse - Scheibenelement

Ausgehend vom inversen Elastizitätsgesetzes des Scheibenelementes für den Mehrschichtverbund kann eine schichtweise Spannungsanalyse berechnet werden. Das Vorgehen wird im folgenden erläutert:

$$\{\epsilon\} = [A]^{-1} \{\sigma\}.$$

Aus den berechneten Gesamtdehnungen des Mehrschichtverbundes  $\{\hat{\epsilon}\}$  ergeben sich mit,

$$\{\epsilon\}^{(k)} = \{\hat{\epsilon}\}$$

die Dehnungen der Einzelschichten im Belastungsachsensystem.

Mit den Transformationsbeziehungen lassen sich nun die Dehnungen für jede Einzelschicht im jeweiligen Materialachsensystem bestimmen:

$$\{\epsilon'\}^{(k)} = [T^{-1}]^T \{\hat{\epsilon}\}.$$

Somit können mit dem Elastizitätsgesetz der Einzelschicht im Materialachsensystem die vorliegenden Spannungen berechnet werden:

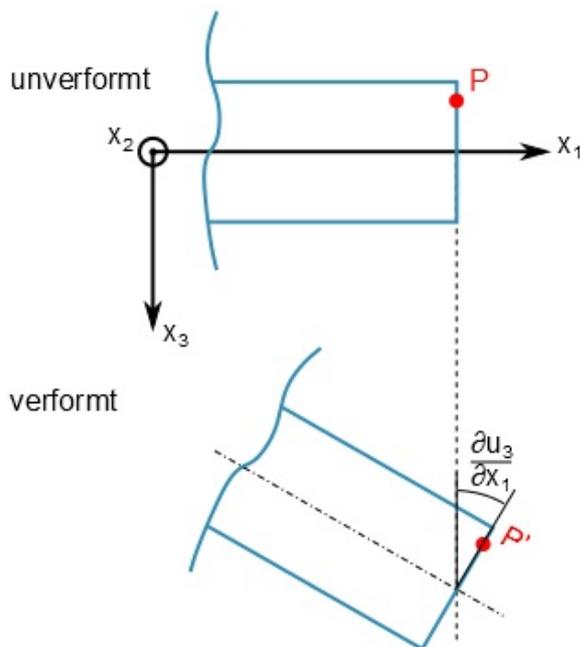
$$\{\sigma'\}^{(k)} = [Q']^{(k)} \{\epsilon'\}^{(k)}.$$

## Plattensteifigkeitsmatrix [D]

Für die Betrachtung des Laminats als Plattenelement wird reine Biegung vorausgesetzt. Es gelten die Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie. Für Laminats ist speziell hinzuzufügen:

- die Schichten sind eben und weisen eine konstante Dicke auf,
- die einzelnen Schichten sind perfekt miteinander verklebt; es tritt kein Gleiten zwischen den Einzelschichten auf,
- keine Klebschichten zwischen den einzelnen Schichten.

Die Kirchhoffsche Plattentheorie fordert dass Plattenquerschnitte auch nach Verformung senkrecht und rechtwinklig auf der Mittelebene stehen. Dabei setzen sich die Verzerrungen aus einem axialen Verschiebungsanteil und einem Anteil aus reiner Biegung zusammen.



**Bild:** Zusammensetzung der Verzerrungen unter Annahme der Kirchhoff Hypothese.

Für den Anteil aus reiner Biegung gilt:

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}.$$

Mit der Definition der Verzerrung:

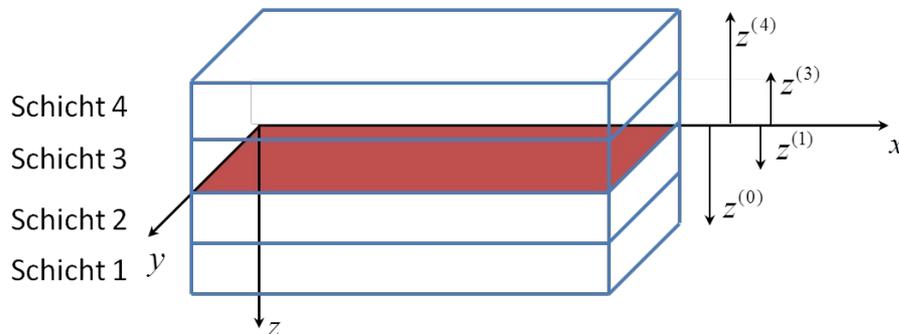
$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

folgt nun

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$$

Um den Anteil aus reiner Biegung zu berechnen, ist die Definition einer Bezugsfläche notwendig. Diese wird bei einer mittelsymmetrischer Schichtung für eine vereinfachte Rechnung in die Symmetrieebene gelegt.



**Bild:** Wahl der Bezugsebene.

Für das weitere Vorgehen zur Bestimmung der Plattensteifigkeitsmatrix benötigt man wieder:

- (i) die Kinematik,
- (ii) das Gleichgewicht und
- (iii) das Werkstoffgesetz.

Aufgrund der idealen Verklebung der Einzelschichten gilt für die Kinematik, dass die Verzerrung des Mehrschichtverbundes mit den Verzerrungen der Einzelschichten übereinstimmen:

$$\{\bar{\epsilon}\} = \{\epsilon\}^{(k)}$$

Mit Hilfe der Definition der Krümmungen ergibt sich:

$$z\{\bar{\kappa}\} = z\{\kappa\}^{(k)},$$

wobei für die Krümmung  $\kappa$  folgendes gilt:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}$$

$$\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y}.$$

Die **Gleichgewichtsbedingung** wird über die Momentenäquivalenz aufgestellt. Dabei ist das außen, am Mehrschichtverbund anliegende Moment  $\widehat{M}_x$  identisch mit der Summe der Momente der Einzelschichten. Das außen anliegende Moment berechnet sich durch das Integral der äußeren Spannung über die Gesamtdicke, wobei  $b$  die Laminatbreite definiert:

$$\widehat{M}_x = \int_t \sigma_x b z dz.$$

Das Moment in einer Einzelschicht berechnet sich durch das Integral der Spannung über die Schichtdicke. Für die Summe der Momente der Einzelschichten gilt somit:

$$\sum_{k=1}^n M^{(k)} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}} \sigma_x^{(k)} b z dz \right)$$

Teilt man nun das außen anliegende Moment und die Summe der Momente der Einzelschichten durch die Breite  $b$  erhält man den sogenannten Momentenfluss  $\widehat{m}$ :

$$\left\{ \frac{M}{b} \right\} = \{\widehat{m}\} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}} \sigma_x^{(k)} z dz \right)$$

Das **Werkstoffgesetz** ist bisher nur für die Einzelschicht bekannt und lautet mit der reduzierten Steifigkeitsmatrix der Einzelschicht im Belastungsachsensystem  $[\overline{Q}]^{(k)}$ :

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\overline{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)}$$

Nun wird das Werkstoffgesetz in die Momentenäquivalenz eingesetzt:

$$\{\widehat{m}\} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}} [\overline{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)} z dz \right)$$

Mit der kinematischen Bedingung der reinen Biegung:

$$\{\varepsilon\}^{(k)} = z \{\kappa\}^{(k)} = z \{\mathcal{R}\}$$

folgt daraus:

$$\{\widehat{m}\} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}} [\overline{Q}]^{(k)} z \{\mathcal{R}\} z dz \right)$$

Wird die Integration ausgeführt erhält man:

$$\{\widehat{m}\} = \sum_{k=1}^n \left( [\overline{Q}]^{(k)} \frac{1}{3} \left[ (z^{(k-1)})^3 - (z^{(k)})^3 \right] \right) \{\mathcal{R}\}$$

bzw.

$$\{\widehat{m}\} = [D] \{\mathcal{R}\}$$

mit der Definition der Plattensteifigkeitsmatrix  $[D]$ :

$$[D] = \sum_{k=1}^n \left( [\overline{Q}]^{(k)} \frac{1}{3} \left[ (z^{(k-1)})^3 - (z^{(k)})^3 \right] \right)$$

Für rechteckige Querschnitte lässt sich diese Definition vereinfachen:

$$[D] = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]^{(k)} \left\{ \frac{t^{(k)^3}{12} + t^{(k)} \left( z_{\widehat{m}}^{(k)} \right)^2 \right\}$$

bzw.

$$D_{IJ} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{IJ}^{(k)} \left[ \frac{t^{(k)^3}{12} + t^{(k)} \left( z_{\widehat{m}}^{(k)} \right)^2 \right],$$

mit der Schichtdicke  $t^{(k)} = z^{(k-1)} - z^{(k)}$  und der mittleren Schichthöhe  $z_{\overline{m}}^{(k)} = \frac{1}{2}[z^{(k)} + z^{(k-1)}]$ .

## Koppelsteifigkeitsmatrix [B]

Besteht ein asymmetrischer Schichtaufbau des Laminats kommt es zu einer Kopplung zwischen Biege- und Zugverformungen. Diese Kopplung wird mit der Koppelsteifigkeitsmatrix beschrieben. Teilt man die Verzerrung in reine axiale Verzerrung  $\{\epsilon^0\}^{(k)}$  und einen Anteil aus reiner Biegung  $z\{\kappa\}^{(k)}$  auf, gilt folglich für die Verzerrungen der Einzelschichten im Belastungsachsensystem  $\{\epsilon\}^{(k)} = \{\overline{\epsilon}\}$  die kinematische Bedingung:

$$\{\epsilon\}^{(k)} = \{\epsilon^0\}^{(k)} + z\{\kappa\}^{(k)} = \{\overline{\epsilon}\}.$$

Betrachtet man nun den Kraftfluss erhält man:

$$\{\overline{n}\} = \sum_{k=1}^n \left( \int_{z^{(k)}}^{z^{(k-1)}} [\overline{Q}]^{(k)} z dz \right) \{\overline{\kappa}\}$$

Führt man die Integration aus erhält man die Definition der Koppelsteifigkeitsmatrix:

$$[B] = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]^{(k)} \frac{1}{2} \left\{ (z^{(k-1)})^2 - (z^{(k)})^2 \right\}$$

bzw. mit der Definition der Schichtdicke  $t^{(k)} = z^{(k-1)} - z^{(k)}$  sowie der mittleren Schichthöhe  $z_{\overline{m}}^{(k)} = \frac{1}{2}[z^{(k)} + z^{(k-1)}]$ :

$$[B] = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]^{(k)} t^{(k)} z_{\overline{m}}^{(k)}.$$

Mit der Superindexschreibweise lautet die Koppelsteifigkeitsmatrix:

$$B_{IJ} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{IJ}^{(k)} t^{(k)} z_{\overline{m}}^{(k)}.$$

Anhand der Koppelsteifigkeitsmatrix lässt sich nun der Vorteil von mittelsymmetrisch geschichteten Laminaten zeigen, denn hier ergibt sich Koppelsteifigkeitsmatrix zur Nullmatrix. Es kommt somit zu keiner Kopplung zwischen Längsverzerrung und Krümmung.

Es soll nun beispielhaft ein mittelsymmetrisch geschichtetes Laminat mit vier Schichten betrachtet werden. Dafür berechnet sich die Koppelsteifigkeitsmatrix durch:

$$[B] = \sum_{k=1}^4 [\overline{Q}]^{(k)} t^{(k)} z_{\overline{m}}^{(k)}.$$

Die Summe wird nun so aufgeteilt, dass in der einen Summe alle Schichten oberhalb und in der anderen Summe alle Schichten unterhalb der Symmetrieebene enthalten sind:

$$[B] = \sum_{k=1}^2 [\overline{Q}]^{(k)} t^{(k)} z_{\overline{m}}^{(k)} + \sum_{k=3}^4 [\overline{Q}]^{(k)} t^{(k)} z_{\overline{m}}^{(k)}.$$

Da die Referenzebene in die Symmetrieebene gelegt wurde gilt für die mittlere Schichthöhe  $z_{\overline{m}}^{(k)}$ :

$$z_{\overline{m}}^{(1)} = -z_{\overline{m}}^{(4)} \text{ und} \\ z_{\overline{m}}^{(2)} = -z_{\overline{m}}^{(3)}.$$

Setzt man diesen Zusammenhang nun in die obige Gleichung ein, wobei  $z_{\overline{m}}^{(k)} = |z_{\overline{m}}^{(k)}|$  gilt:

$$[B] = \sum_{k=1}^2 [\bar{Q}]^{(k)}_t(k) z^{(k)}_m - \sum_{k=3}^4 [\bar{Q}]^{(k)}_t(k) |z^{(k)}_m|,$$

ergibt sich  $[B] = [0]$ . Die Koppelsteifigkeitsmatrix ist gleich der Nullmatrix, d.h. keine Kopplung zwischen Längsverzerrung und Krümmung.

## Literatur

- [1] SCHÜRMAN, H.: Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden: Mit 39 Tabellen. Berlin: Springer, 2007.
- [2] TOEMA: <http://www.maxrev.de/geschnittene-e-glasfasermatte-bild-244577.htm>  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [3] HAUTMANN, D.: Kohlefaer dringend gesucht.  
<http://www.welt.de/print-welt/article153220/Kohlefasern-dringend-gesucht.html>  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [4] VDI-Richtlinie 2014: Entwicklung von Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden
- [5] WIEDEMANN, M.: Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) (Hrsg.): CFK - Status der Anwendung und Produktionstechnik im Flugzeugbau.  
[http://elib.dlr.de/61319/1/Vortrag\\_Faszination\\_Karosserie.pdf](http://elib.dlr.de/61319/1/Vortrag_Faszination_Karosserie.pdf). Version: 29.07.2013  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [6] E-MechLAB: Verbundwerkstoffe - Mechanik.  
<http://mb-s1.upb.de/E-MechLAB/Verbundwerkstoff-Mechanik/>  
 letzter Zugriff: 15.10.2013 hat nicht funktioniert
- [7] Petrochemische industrielle Ausrüstung Co. (Hrsg.): Kohlenstoff-Faser-Stoff, Faser-Stoff-hitzebeständig Materialien des Kohlenstoff-3k.  
[http://german.sealing-gaskets.com/china-carbon\\_fiber\\_cloth\\_3k\\_carbon\\_fiber\\_cloth\\_heat\\_resistant\\_materials-1081774.html](http://german.sealing-gaskets.com/china-carbon_fiber_cloth_3k_carbon_fiber_cloth_heat_resistant_materials-1081774.html)  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [8] TU Chemnitz (Hrsg.): Para-Aramidfaser.  
[http://www.tu-chemnitz.de/phil/ifgk/tk/projekte/clim\\_wiki/index.php/Bild:Para-Aramidfaser.Kevlar.jpg](http://www.tu-chemnitz.de/phil/ifgk/tk/projekte/clim_wiki/index.php/Bild:Para-Aramidfaser.Kevlar.jpg)  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [9] Institut für angewandte Forschung im Bauwesen e.V. (Hrsg.): Textile Fasern zum Einsatz im Bauwesen - Aramidfasern.  
[http://www.iafb.de/pdf/hht/M-02\\_Merkblatt\\_Material\\_Fasern-Aramid.pdf](http://www.iafb.de/pdf/hht/M-02_Merkblatt_Material_Fasern-Aramid.pdf)  
 letzter Zugriff: 15.10.2013
- [10] Materialarchiv: Silikon-Kautschuk  
<http://materialarchiv.ch>  
 letzter Zugriff: 24.02.2016